

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
MESTRADO EM MATEMÁTICA**

**UMA ABORDAGEM DE GEOMETRIAS  
NÃO-EUCLIDIANAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA:  
GEOMETRIA ESFÉRICA**

**OSNILDO ANDRADE CARVALHO**

CRUZ DAS ALMAS  
2014

# **UMA ABORDAGEM DE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: GEOMETRIA ESFÉRICA**

**OSNILDO ANDRADE CARVALHO**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Mestrado em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, e a Sociedade Brasileira de Matemática como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

**Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Juarez dos Santos Azevedo**

**CRUZ DAS ALMAS**

**2014**

# UMA ABORDAGEM DE GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA: GEOMETRIA ESFÉRICA

OSNILDO ANDRADE CARVALHO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Mestrado em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, e a Sociedade Brasileira de Matemática como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

## Banca Examinadora:

Orientador: Juarez I. Santos Azevedo  
Profº Dr. Juarez dos Santos Azevedo - UFRB

Membro: Cícero Alfredo da Silva Filho  
Profº Dr. Cícero Alfredo da Silva Filho - UESC

Membro: Mariana Pinheiro Gomes da Silva  
Profª Dra. Mariana Pinheiro Gomes da Silva - UFRB

Cruz das Almas, 21 de Março de 2014.

*A minha querida esposa Jésua  
e meus filhos Silas e Ana Vitória,  
com muito amor.*

*"Algo só é impossível até que alguém duvida  
e acaba provando o contrário."  
Albert Einstein*

# Agradecimentos

Agradeço, essencialmente, à Deus pelo Seu amor incondicional, pelo Seu amparo ante aos obstáculos que a vida me impôs e por ter permitido o cumprimento desta importante etapa da minha vida.

Agradeço à meus amigos Roque Lyrio, Gabriel Velame pelas palavras de incentivo e amizade que fizeram para que este momento pudesse se concretizar.

Agradeço à minha família e, de um modo especial, à minha esposa Jésua, pelo amor, incentivo e pelo contínuo apoio durante o período de mestrado, bem como fora dele.

Agradeço a Capes o apoio mediante o financiamento para realização deste trabalho.

Agradeço a Sociedade Brasileira de Matemática em propor este Mestrado, no qual contemplou os professores em exercícios dando uma oportunidade para a capacitação profissional.

Agradeço em especial a meu orientador, professor Juarez Azevedo, por ter me acompanhado como seu orientando no desenvolvimento deste e de outros trabalhos acadêmicos, pela paciência, pelas conversas e incentivo, por toda a dedicação e disponibilidade.

Agradeço aos professores dr. Cícero Alfredo e dra. Mariana Pinheiro por aceitarem em participar da banca examinadora deste trabalho, bem como pelas suas correções e formidáveis sugestões adicionadas à ele.

Enfim, a todos os que, de alguma maneira, contribuíram para a conclusão de mais esta etapa da minha vida, os meus sinceros agradecimentos.

Osnildo Andrade Carvalho.

# Resumo

**N**ESTE trabalho, estudaremos uma abordagem das Geometrias não-Euclidianas, como uma forma de verificar que a ciência, e em particular a Matemática pode obter visões diferentes da realidade, mesmo depois de anos consolidada. Abordaremos os postulados de Euclides, e as controvérsias em torno do postulado das paralelas, além de tratar os dois tipos clássicos de Geometrias não-Euclidianas: Hiperbólica e Esférica. Iremos concluir com aplicações a Geometria Esférica, assunto este instrutivo e de fácil acesso aos estudantes e professores do ensino básico.

**Palavras-chave:** Geometrias não-Euclidianas, Geometria Hiperbólica, Geometria Esférica, Triângulos Esféricos.

# Abstract

**I**N this paper, we study an approach to non-Euclidean geometries, as a way to verify that science, particularly mathematics can get different views of reality, even after years consolidated. Therefore approach the postulates of Euclid, and the controversies surrounding the postulate of parallel. In addition, addressing the two classical types of non-Euclidean geometries: spherical and hyperbolic. We will conclude with applications of Spherical Geometry, issue this instructive and rich, easily accessible to students and teachers of basic education.

**Keywords:** Non-Euclidean Geometries, Euclidean, Spherical Geometry, Spherical Triangles.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>14</b>
1.1 Histórico da Geometria Euclidiana. . . . .	14
1.1.1 Postulados ou Axiomas? . . . . .	17
1.2 Tentativas frustradas de provar o quinto postulado. . . . .	19
1.3 Surgimento das Geometrias não-Euclidianas. . . . .	21
1.4 Geometria Hiperbólica. . . . .	24
1.4.1 Modelos da Geometria Hiperbólica. . . . .	24
1.5 Geometria Esférica. . . . .	28
<b>2 Conhecendo melhor a Geometria Esférica.</b>	<b>31</b>
2.1 Definindo a esfera e, entendendo alguns de seus elementos. . . . .	32
2.1.1 Relação entre o arco de paralelo e o correspondente arco do Equador. . . . .	37
2.2 Triângulos esféricos . . . . .	38
2.2.1 Propriedades dos triângulos esféricos. . . . .	40
2.2.2 O teorema de Pitágoras na Geometria Esférica. . . . .	47
2.3 Relação entre o número $\pi$ e o diâmetro do círculo. . . . .	47
<b>3 Aplicações da Geometria Esférica.</b>	<b>49</b>
<b>Considerações finais</b>	<b>58</b>

# Lista de Figuras

1.1	Euclides de Alexandria. . . . .	14
1.2	O quinto postulado de Euclides. . . . .	19
1.3	Nasiraddin. . . . .	20
1.4	Jonh Wallis. . . . .	21
1.5	Johann Heinrich Lambert. . . . .	21
1.6	Carl Friedrich Gauss. . . . .	22
1.7	Farkas Bolyai. . . . .	23
1.8	Janos Bolyai. . . . .	23
1.9	Nicolai Lobachevsky. . . . .	24
1.10	Representação geométrica do Postulado de Lobachevsky. . . . .	25
1.11	(a) Eugênio Beltrami. (b) Pseudo-esfera. . . . .	26
1.12	(a) Felix Klein. (b) Modelo de Klein. . . . .	26
1.13	Consequências do modelo de Klein. . . . .	27
1.14	Quadrilátero no modelo de Klein. . . . .	28
1.15	(a) Jules Henri Poincaré. (b) Modelo de Poincaré. . . . .	28
1.16	Triângulo hiperbólico. . . . .	29
1.17	Bernhard Riemann . . . . .	29
2.1	Esfera. . . . .	32
2.2	Eixo polar. . . . .	33
2.3	Latitude e longitude. . . . .	35
2.4	Globo Terrestre. . . . .	35
2.5	Plano euclidiano. . . . .	36
2.6	Plano esférico. . . . .	36
2.7	Trajatória Salvador-Lisboa. . . . .	37
2.8	Arco paralelo. . . . .	38

2.9	Triângulo esférico. . . . .	39
2.10	Ângulos diedros ou Diedros. . . . .	40
2.11	Ângulos triedros ou Triedros. . . . .	40
2.12	Ângulo triedro. . . . .	41
2.13	Triângulo esférico. . . . .	42
2.14	Superfícies esféricas limitadas por diedros. . . . .	43
2.15	Triângulo esférico com 3 ângulos retos. . . . .	44
2.16	Triângulo esférico . . . . .	45
2.17	Cálculo do número $\pi$ . . . . .	48
2.18	Cálculo de $\pi$ na Geometria Esférica. . . . .	48
3.1	Problema 3.1 na folha de papel. . . . .	50
3.2	Problema 3.1 na bola de isopor. . . . .	50
3.3	Encontrando a distância na superfície esférica . . . . .	55
3.4	Comparando distâncias na superfície esférica. . . . .	57

# Introdução

A Geometria é na sua essência baseada na realidade, e o seu desenvolvimento é diretamente ligado ao *sistema dedutivo*<sup>1</sup>. Ela é iniciada a partir de definições de elementos (pontos, retas, planos), sendo necessário aceitar algumas verdades intuitivas impostas as quais se estabelecem entre esses elementos que denominamos *axioma*. Em seguida, criamos regras através de Teoremas ou Proposições, que são deduzidos apenas através de um raciocínio lógico de axiomas fixados. A depender, do conjunto dos axiomas a serem considerados, podemos estabelecer várias geometrias distintas.

Neste sentido, iremos tratar do histórico das Geometrias Euclidiana e não-Euclidiana e trazer os fundamentos matemáticos que motivaram a existência de outras Geometrias. É importante salientar que a Geometria Euclidiana está interligada a grande aplicabilidade no cotidiano e que a torna extremamente útil em nossas vidas. Porém, esta Geometria possui suas limitações, pois não é aplicável, por exemplo, na escala da molécula e nem na escala cosmos [1]. Apesar disso, seu desenvolvimento desde a época dos Babilônicos (2000 a.C. a 1600 a.C.) até os dias atuais é incontestável. Sua grande expansão vem desde a criação da famosa publicação *Os Elementos* por Euclides de Alexandria datada por volta de 300 anos a.C.<sup>2</sup>. Nessa época todo conhecimento geométrico empírico foi sistematizado por Euclides no período áureo da Grécia através desta sua obra prima. Este livro era um conjunto de treze livros ou capítulos, que reunia os conhecimentos matemáticos da época e até hoje tem ampla divulgação, perdendo somente para Bíblia Sagrada [2].

Embora a obra *Os Elementos* tenha uma importância fundamental para o desenvolvimento da Geometria, outras obras tentaram anteceder, mas sem êxito, como por exemplo o trabalho desenvolvido por Hipócrates de Quio e por conseguinte o de Lêon, depois por Teúdio de

---

<sup>1</sup>sistema dedutivo: é aquele constituído de axiomas e regras de inferência que podem ser usadas para derivar os teoremas do sistema.

<sup>2</sup>Segundo [2] é desapontador porém, muito pouco se sabe sobre a sua vida, salvo que foi ele, segundo possa parecer, o criador da famosa escola de matemática de Alexandria.

Magnésia na Academia de Platão. Provavelmente, a obra de Euclides tenha se baseado nestas anteriores, e conseguiu se aperfeiçoar de forma inteligente escolhendo as proposições adequadas e demonstrações eficazes [3]. O mérito desta obra, entretanto, não estava nos conteúdos abordados, visto serem conhecidos pelos egípcios, mesopotâmicos e gregos, mas na metodologia empregada na compilação dos resultados [4].

Até meados do século *XIX*, a Geometria Euclidiana se manteve inalterada, quando matemáticos procuraram analisar a independência dos postulados de Euclides. Motivados por novas descobertas, surgiram então as Geometrias **não-Euclidianas**, porém com estruturas axiomáticas tão consistentes quanto as Euclidianas. Estas Geometrias chegaram a ser chamadas de imaginárias, pelo fato de considerar a de Euclides a real, ou seja, a que representava o universo físico da época, além de dar um suporte a Física Newtoniana, que explicava de maneira satisfatória os fenômenos do cotidiano [1]. Além disso, com o crescente desenvolvimento das ciências, principalmente da Física, da Astrofísica, da Química e aperfeiçoamento dos instrumentos de análise da matéria, a Geometria Euclidiana se tornou limitada e não conseguiu explicar alguns fenômenos físicos neste período. Com isso as novas Geometrias deram suporte ao aparecimento da Física Relativística e da Mecânica Quântica [1], que tem enorme importância e expansão nos dias atuais.

Motivados pela origem e estudo destas distintas Geometrias e a fim de descrever suas origens, iniciaremos este trabalho com o histórico da Geometria Euclidiana. Em seguida, mostraremos o surgimento de novas Geometrias, as chamadas não-Euclidianas destacando-se entre elas a Geometria Hiperbólica e Geometria Esférica. Tendo sua importância no ensino básico para compreender o espaço físico onde vivemos, ou seja, o Globo Terrestre.

É importante notar, que a Geometria não-Euclidiana é pouco divulgada entre os estudantes do ensino básico, enquanto a Geometria Euclidiana exerce grande destaque. Por conta disso, é natural que a Geometria Euclidiana seja inconscientemente tida como única e universal entre estes estudantes. Assim, a busca em despertar nos estudantes que a ciência é dinâmica e as verdades não são absolutas, leva-nos a analisar e refletir sobre os conteúdos e abordagens feitas no seu período acadêmico.

A dissertação é organizada como segue:

Capítulo 1: resgata um pouco da história da obra *Os Elementos* e mostra o surgimentos das Geometrias não-Euclidianas, destacando a Geometria Hiperbólica e Esférica.

Capítulo 2: apresenta elementos da Geometria Esférica, como definições e conceitos referentes a esta Geometria além dos principais teoremas e corolários.

Capítulo 3: faz algumas aplicações da Geometria Esférica, tendo destaque nos triângulos esféricos e distâncias na superfície esférica. Aplicações essas, que podem ser abordadas tanto no ensino básico como na graduação. Sendo assim, uma forma de motivar a apresentação das Geometrias não-Euclidianas.

# Capítulo 1

## Preliminares

O Capítulo faz um breve resumo da obra de Euclides (Figura 1.1) intitulada "*Os Elementos*" e as discussões acerca do quinto postulado, o qual levaram ao surgimento das novas Geometrias, com o intuito de deixar melhor compreendido os capítulos seguintes.



Figura 1.1: Euclides de Alexandria.

### 1.1 Histórico da Geometria Euclidiana.

O livro *Os Elementos* foi um trabalho extremamente relevante, visto que até hoje a geometria trabalhada na escola básica está ligada aos postulados e teoremas apresentados na mesma época por Euclides. Foi uma grande influência para as gerações seguintes, devido ao aspecto formal se tornando um modelo para a Matemática moderna de acordo com [2, 5]. Apesar da impressão difundida, *Os Elementos* não trata apenas de geometria plana e espacial. O livro também apresenta álgebra elementar e teoria dos números. Além disso, é composto de 465

proposições distribuídas em treze volumes.

Como Euclides, abrangeu importantes conhecimentos Matemáticos da época, segue uma descrição sucinta baseada em Boyer [3] de cada um dos volumes desta importante obra:

Livro *I* está diretamente ligado nas definições de Geometria, que é trabalhada na escola secundária, possuem 28 proposições, dentre elas: congruências de triângulos, construções simples com régua e compasso, desigualdades relativas a ângulos e lados de um triângulo, soma dos ângulos internos de um triângulo como sendo igual a soma de dois ângulos retos. Finalizando, com a demonstração do teorema de Pitágoras.

Livro *II* é o menor deles, apresentando apenas quatorze proposições, voltada para álgebra geométrica. Como exemplo a Proposição 4: "*Se um segmento de reta é cortado ao acaso, o quadrado sobre o todo é igual aos quadrados sobre os segmentos e duas vezes o retângulo contido pelos segmentos*", é uma maneira de dizer  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ . Neste livro encontram-se os equivalentes geométricos de muitas identidades algébricas.

Livro *III*, trata de Geometria no círculo. Com 37 proposições, provavelmente descobertas por Hipócrates [6], com elementos do círculo como arcos, segmentos, tangentes e cordas.

Livro *IV*, é dedicado à construção com régua e compasso de alguns polígonos regulares: triângulos, quadrados, pentágonos e hexágonos, inscritos e circunscritos em circunferências. Com base no triângulo e pentágono regulares, Euclides ensina a construir o polígono de 15 lados (pentadecágono).

Livro *V*, utiliza segmentos de retas para representar números. Euclides, apresenta a teoria das proporções, de Eudócio <sup>1</sup>, como a proposição *V* – 12: "*Se um número qualquer de pares de magnitudes mantém uma relação de proporcionalidade, então, da mesma maneira que um antecedente está para seu conseqüente, a soma de todos os antecedentes estará para a soma de todos os conseqüentes*"[6]. Algebricamente temos:

$$a : b = c : d = e : f = \dots$$

então

$$a : b = (a + c + e + \dots) : (b + d + f + \dots)$$

Essa e outras proposições de proporcionalidade são independentes da comensurabilidade e acabaram tendo aplicação decisiva na aritmética que os gregos conseguiram construir.

---

<sup>1</sup>Eudócio de Cnidos era um humilde aluno que Platão recebeu em sua Academia, extremamente pobre, nascido em 408 a. C. Entre outros grandes feitos, coube a Eudócio a eterna honra de reformular a teoria das proporções de modo a levar em conta a existência dos irracionais, problema que os pitagóricos não conseguiram resolver. Assim, tornou-se um dos maiores matemáticos da Antiguidade.



Livro *VI*, é destinado a aplicabilidade da teoria das proporções (livro *V*) às figuras semelhantes. Nele encontramos os teoremas fundamentais de semelhança de triângulos; construções de terceiras, quartas e médias proporcionais e resolução geométrica de equações quadráticas. É possível que nenhum teorema nesse livro fosse desconhecido dos pitagóricos antigos [2].

Livro *VII*, baseado em teoria dos números, estuda as propriedades do conjunto dos naturais e suas relações. Sendo a proposição *VII – 2* a mais famosa dos *Os Elementos*, onde apresenta o método para se encontrar o máximo divisor comum (m.d.c.) de dois números, através de uma sequência de operações que ficou conhecido como **Algoritmo de Euclides**. Enunciado em forma de regra, como segue: "Divida o maior dos dois números inteiros positivos pelo menor e então divida o divisor pelo resto. Continue esse processo de dividir o último divisor pelo resto, até que a divisão seja exata. O divisor final é o m.d.c. procurado". Este procedimento é encontrado em vários livros de aritmética [7, 5, 8, 9, 10].

Livro *VIII*, com 27 proposições é também um livro aritmético e trata de propriedades dos números, em especial as sequências que os gregos chamavam de proporção contínua, onde hoje conhecemos como Progressões Geométricas. Como exemplo a Proposição *VIII – 22*: "se três números estão em proporção contínua e se o primeiro deles é um quadrado, então o terceiro também será um quadrado".

Livro *IX*, trata da Teoria dos Números, com 36 proposições e teoremas relevantes como o Teorema *IX – 14* Teorema Fundamental da Aritmética: "Qualquer número pode ser decomposto e de uma forma única, exceto quanto à ordem dos fatores, como produto de seus fatores primos". Sendo admirável que os gregos já soubessem disso. Este teorema é encontrado em vários livros de teoria dos números e criptografia [7, 5, 9, 10, 11].

Livro *X*, é o mais longo dos 13 volumes, com 115 proposições. Neste livro, Euclides classifica e estuda os diversos tipos de grandezas incomensuráveis das formas

$$a \pm \sqrt{b}, \sqrt{a} \pm \sqrt{b}, \sqrt{a \pm \sqrt{b}} \text{ e } \sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$$

onde  $a$  e  $b$  são magnitudes comensuráveis. Encontramos também fórmulas que fornecem as ternas pitagóricas, fórmulas essas que os babilônicos antigos talvez já tivessem conhecimento um milênio antes [2].

Livro *XI*, com 39 proposições, mostra a passagem do plano para o espaço por Euclides. Pela primeira vez, trata de figuras sólidas, definidas como aquelas que tem comprimento, largura e

espessura. Descreve os sólidos de revolução como a pirâmide, prisma, paralelepípedo, cone e esfera, além dos cinco poliedros regulares.

Livro *XII*, traz 18 proposições, abordando o estudo de áreas e volumes, além de figuras como cones, esferas e pirâmides. Destaca-se o *método de exaustão* utilizado para encontrar a área de uma figura inscrevendo-se dentro dela uma sequência de polígonos cuja soma das áreas converge para a área da figura desejada. Os principais teoremas demonstrados são:

1. As pirâmides e os prismas de mesma base (ou mesma altura) estão entre si como suas alturas (ou bases).
2. Todo prisma triangular se decompõe em três pirâmides equivalentes.
3. O volume de um cone é um terço do volume do cilindro de mesma base e altura.
4. Os cones e cilindros de mesma base (ou altura) estão entre si como suas alturas (ou bases).
5. Os volumes de duas esferas estão entre si como os cubos dos seus diâmetros.

O último livro se dedica ao estudo das propriedades dos cinco sólidos regulares: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Este fato levou a alguns historiadores a dizer que *Os Elementos* foram compostos como uma glorificação das figuras platônicas [3]. Porém, como os volumes anteriores não tem uma relação com os poliedros regulares, tal comentário não tem procedência. Sendo apenas uma espécie de clímax para concluir sua obra [6].

### 1.1.1 Postulados ou Axiomas?

Apesar de nos dias atuais não se fazer distinção entre axioma e postulado, a maioria dos matemáticos gregos consideravam esta distinção a partir da seguinte definição: "um axioma é uma suposição comum a todas as ciências ao passo que um postulado é uma suposição peculiar a uma ciência particular em estudo"[2]. Não se sabe com exatidão quais os axiomas e postulados utilizados por Euclides, muito menos, quantos, devido as alterações feitas pelos editores subsequentes. Provavelmente, ele assumiu dez afirmações, cinco *axiomas*  $A_1, \dots, A_5$  e cinco *postulados*  $P_1, \dots, P_5$  a saber:

$A_1$ : Coisas iguais à mesma coisa são iguais entre si.

$A_2$ : Adicionando-se iguais a iguais, as somas são iguais.

$A_3$ : Subtraindo-se iguais, as diferenças são iguais.

$A_4$ : Coisas que coincidem uma com a outra são iguais entre si.

$A_5$ : O todo é maior do que a parte.

$P_1$ : É possível traçar uma linha reta de um ponto qualquer a outro ponto qualquer.

$P_2$ : É possível prolongar uma reta finita indefinidamente em linha reta.

$P_3$ : É possível descrever um círculo com qualquer centro e qualquer raio.

$P_4$ : Todos os ângulos retos são iguais entre si.

$P_5$ : Se uma reta intercepta duas retas formando ângulos interiores de um mesmo lado menores do que dois retos, prolongando-se essas duas retas indefinidamente elas se encontrarão no lado em que os dois ângulos são menores do que dois ângulos retos.

Através desses axiomas e postulados, Euclides construiu a geometria que se estuda hoje, tanto na educação básica como superior. Através de uma breve análise, percebemos que os postulados  $P_1$  e  $P_2$ , estabelecem a existência de uma reta determinada por dois pontos. Já o  $P_3$  estabelece a existência do círculo, apenas com o raio e o centro. Devido a isso a régua sem escala e o compasso desmontável tornaram-se os únicos instrumentos permitidos para problemas de construção da Geometria Euclidiana [2], enquanto o postulado  $P_4$  apenas estabelece uma congruência entre ângulos retos.

No caso do postulado  $P_5$  (vide Figura 1.2), devido a sua difícil linguagem, muitos matemáticos durante mais de dois milênios, imaginaram se tratar de um teorema e não de um postulado, onde poderia ser demonstrado a partir dos quatro primeiros [12]. Na tentativa de melhorar o entendimento, outros enunciados surgiram. Dentre estes, o mais conhecido foi o do matemático e físico escocês John Playfair (1748 – 1819): "*Por um ponto fora de uma reta passa uma única reta paralela à reta dada*". Isto tornou o quinto postulado conhecido como postulado das paralelas [2]. Outras alternativas para o postulado das paralelas são as seguintes:

- (1) Há pelo menos um triângulo cuja a soma dos ângulos internos é igual a um ângulo raso;
- (2) Existe um par de retas igualmente distantes uma da outra em todos os pontos;

- (3) Por três pontos não-colineares pode-se traçar uma circunferência;
- (4) Por qualquer ponto interior de um ângulo menor que  $90^\circ$  pode-se sempre traçar uma reta que intercepta ambos os lados do ângulo.

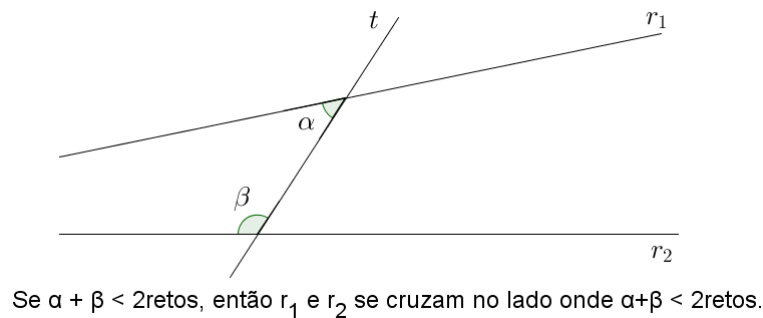


Figura 1.2: O quinto postulado de Euclides.

## 1.2 Tentativas frustradas de provar o quinto postulado.

As tentativas de provar o quinto postulado ou postulado das paralelas, ocuparam os geômetras por mais de dois milênios. Porém, nenhuma das tentativas teve êxito levando à seguinte conclusão: **não existe uma demonstração para o postulado das paralelas, considerando os quatro primeiros postulados como hipótese**. Apesar das tentativas frustradas para provar o postulado das paralelas, vale ressaltar que os esforços neste sentido foram essenciais para o surgimento das Geometrias não-Euclidianas.

Algumas pessoas no decorrer da história fizeram tentativas, mesmo que fracassadas para a prova do postulado das paralelas. Dentre elas, destacam-se:

Ptolomeu (século *II* d.C.), escreveu um livro sobre o postulado das paralelas, com o título: "Que linhas prolongadas de ângulos menores que dois ângulos retos encontram-se uma com a outra". Este fato foi citado por Proclus (410 – 485 d.C.) que nos seus comentários afirma que Ptolomeu cometeu um equívoco em admitir que a propriedade é verdadeira somente sob a validade do postulado das paralelas. Assume que as propriedades aceitas para os ângulos interiores de um lado da reta transversal também devem ser válidas para os ângulos do outro lado [13].

Em seguida o próprio Proclus, propôs uma prova. Com o argumento de mostrar que dada duas retas paralelas, se uma transversal intercepta uma delas, deverá então interceptar a outra. Na sua demonstração acaba admitindo que duas retas paralelas são equidistantes. Porém, essa afirmação é válida dentro da Geometria Euclidiana, como consequência do quinto postulado.

Nasiraddin (1201 – 1274) (Figura 1.3), astrônomo e matemático persa pode ter sido o primeiro a dirigir sua atenção para o quinto postulado utilizando o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo. Mas, sua demonstração acaba implicitamente considerando verdadeira o quinto postulado [13].



Figura 1.3: Nasiraddin.

Já no ano de 1663, o geômetra inglês Jonh Wallis (1616 – 1703) (Figura 1.4) na Universidade de Oxford, ofereceu uma prova de sua autoria para o quinto postulado. Nesta prova, ele desprende-se da ideia de assumir retas paralelas sendo equidistantes [14]. Neste caso, propôs um novo axioma: *"Seja um triângulo  $\Delta ABC$  e um segmento  $DE$  quaisquer. Existe um triângulo  $\Delta DEF$  (tendo  $DE$  como um de seus lados) que é semelhante a  $\Delta ABC$ "*, substituindo o postulado das paralelas. Porém, não fez mais do que dar um novo enunciado ao quinto postulado de Euclides.

No século XVIII, Giorolamo Saccheri (1667 – 1733), professor jesuíta de matemática em Pavia, na sua tentativa de provar o quinto postulado utilizou o método *redução ao absurdo*. Porém, seu trabalho não conseguiu convencer outros matemáticos, mas o interessante é que suas conclusões se aproximaram do que hoje se chama de Geometria não-Euclidiana; entretanto, Saccheri rejeitou-as imediatamente, declarando que uma geometria dessa espécie era repugnante [15].

Além de Saccheri, o matemático suíço Johann Heinrich Lambert (1728 – 1777) (Figura 1.5) prosseguiu com suas ideias, que embora tentasse provar o quinto postulado, parece ter tido consciência de não ter conseguido. E, ninguém mais chegou tão perto da verdade sem des-



Figura 1.4: Jonh Wallis.

cobrir as Geometrias não-Euclidianas [3]. Apesar do esforço empreendido na época para se



Figura 1.5: Johann Heinrich Lambert.

encontrar uma demonstração para o quinto postulado, no início do século *XIX* surgiram as primeiras suspeitas de que a demonstração tanto procurada era impossível [14]. Os primeiros a perceber este fato foram os matemáticos Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Janos Bolyai (1802 – 1860) e Nicolai Lobachevsky (1793 – 1856). Assim, seus trabalhos consistiram na negação do quinto postulado o que motivou o surgimento de Geometrias não-Euclidianas.

### 1.3 Surgimento das Geometrias não-Euclidianas.

Na primeira metade do século *XIX*, foi descoberta uma geometria autoconscistente, distinta da Geometria de Euclides. Com a substituição do quinto postulado, ou postulado das paralelas, surgem dois tipos clássicos de Geometrias não-Euclidianas: *Geometria Hiperbólica* e a *Geometria Esférica*.

Na *Geometria Hiperbólica*, o quinto postulado de Euclides é substituído pela seguinte afirmativa: dado um ponto  $P$ , fora de uma reta  $r$ , passa mais de uma paralela a esta reta  $r$  passando por  $P$ . Já na *Geometria Esférica* postula-se que não existe nenhuma reta paralela [12].

Carl Friedrich Gauss (Figura 1.6) foi o primeiro a escrever sobre as ideias de uma nova geometria, embora não tenha publicado tais escritos. Temeroso das reações pouco receptivas da comunidade científica da época, essas ideias, levaram a independência do quinto postulado [4]. Contudo Gauss, compartilhou suas ideias com um colega da Universidade de Göttingen, o matemático húngaro Farkas Bolyai (Figura 1.7). Em carta datada de 17 de dezembro de 1799, ele escreveu: "É verdade que cheguei a várias coisas que muitas pessoas considerariam uma prova: mas, em meus olhos, elas nada provam. Por exemplo, se alguém conseguisse demonstrar a possibilidade de um triângulo retilíneo cuja área fosse maior do que qualquer área dada, então eu estaria pronto para provar o conjunto da geometria de maneira absolutamente rigorosa. Muitas pessoas admitiriam isso como um axioma mas eu não. De fato, seria possível que a área ficasse sempre abaixo de certo limite, não importando o quão longe os três vértices do triângulo fossem colocados"[6].

Esta afirmação a princípio causa uma certa perplexidade, basta observar que, sobre a superfície de uma mesma esfera, as áreas dos triângulos esféricos não podem ultrapassar certo limite, porém estava correta.

Foram trocadas várias correspondências entre ambos, o que indica que Farkas também empregou muita energia, sem resultados satisfatórios. Gauss também teve muito tempo para publicar seus trabalhos, mas jamais o fez [6]. Nesta época, Farkas Bolyai teve um filho com



Figura 1.6: Carl Friedrich Gauss.

afinidade para a matemática, Janos Bolyai (1802 – 1860) (Figura 1.8), onde aos treze anos já se revelava um gênio, dominando completamente os cálculos diferencial e integral e outros



Figura 1.7: Farkas Bolyai.

ramos da matemática superior, fato este que o levou a se dedicar na demonstração do quinto postulado onde chegou a resultados interessantes. Em 1823, em uma carta ao seu pai Farkas Bolyai escrevia: "Revolvi publicar um trabalho sobre as paralelas, tão logo tenha o material organizado. O objetivo ainda não foi alcançado, mas tenho feito descobertas maravilhosas que quase sou esmagado por elas, eu criei um universo inteiramente novo a partir do nada <sup>2</sup>"[12].



Figura 1.8: Janos Bolyai.

Na próxima seção iniciamos um estudo a respeito das Geometrias não-Euclidianas começando com a Geometria Hiperbólica.

---

<sup>2</sup>Palavras do pai em carta ao filho Janos Bolyai: "Pelo amor de Deus, eu peço, desista! Tema, tanto isto quanto as paixões sensuais, porque isso também pode tomar todo seu tempo, e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida!



## 1.4 Geometria Hiperbólica.

De maneira independente, dois matemáticos desenvolveram essa Geometria, o russo Nicolai Lobachevsky (1792 – 1856) (Figura 1.9), quase que simultaneamente, o matemático húngaro Janos Bolyai (1802 – 1860) que apesar de suas convicções, não aprofundou suas pesquisas. Lobachevsky dedicou mais de duas décadas à sua descoberta. Em 1826, foi a primeira



Figura 1.9: Nicolai Lobachevsky.

apresentação do seu trabalho, na cidade de Kazan na Rússia, sem nenhuma aceitação. As afirmações de Lobachevsky colocavam em dúvida a inquestionável Geometria de Euclides. Apesar disso, Lobachevsky publicou seus trabalhos, finalizando sua obra, a *Pangeometria* em 1855. Curiosamente este texto foi ditado, pelo fato do mesmo estar idoso e cego, confirmando, a sua confiança na sua descoberta e determinação. Isto leva a nova geometria a ser conhecida também pelo seu nome [12].

Esta Geometria se caracteriza pelo fato de admitir todos os postulados da Geometria Euclidiana, com exceção do quinto postulado, sendo substituído pelo postulado de Lobachevsky: *Por um ponto dado  $P$ , fora de uma reta  $r$ , passa mais de uma paralela a esta reta  $r$ .*

A Figura 1.10 ilustra esta Geometria. Note que entre as retas  $m_1$  e  $m_2$  passam infinitas retas, que não interceptam a reta  $r$ . Estas retas são chamadas de *não-secantes*, e não são consideradas como paralelas à reta  $r$ . Apenas as retas  $m_1$  e  $m_2$  o são.

### 1.4.1 Modelos da Geometria Hiperbólica.

A representação das Geometrias não-Euclidianas merece alguns comentários pois, estamos habituados a representar os elementos Euclidianos sobre uma folha de papel que, entendemos

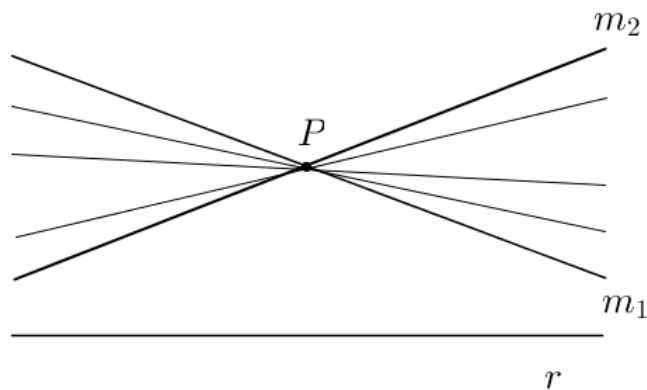


Figura 1.10: Representação geométrica do Postulado de Lobachevsky.

ser, uma aproximação razoável do que imaginamos ser o plano euclidiano. Assim, quando representamos elementos planos (triângulos, círculos, retas, etc.), esses desenhos buscam respeitar as dimensões das figuras, mas evidentemente estes desenhos não passam de representações de ideias abstratas. Mesmo os elementos tridimensionais, podem ser desenhados no papel (buscando respeitar ângulos e distâncias). Neste caso, são introduzidas distorções tanto nos ângulos quanto nos comprimentos. Estas distorções, todavia passam despercebidas, pois fomos habituados a ela desde a infância de modo que, quando observamos os desenhos no papel associamos simultaneamente às ideias espaciais abstratas.

No entanto, para um indivíduo que está começando a conhecer as Geometrias não-Euclidianas, sua representação sobre uma folha de papel introduz distorções inevitáveis: por exemplo, as retas, as vezes são desenhadas como na Geometria Euclidiana e outras vezes como linhas curvas. O que pode causar uma sensação estranha para ao leitor. Uma vez que ele, acha que todas as retas dentro de uma mesma Geometria, devem ser iguais [6].

Particularmente, para observar melhor a Geometria Hiperbólica é utilizada a superfície da **pseudo-esfera** (vide Figura 1.11(b)). Este modelo foi construído por Eugênio Beltrami <sup>3</sup> (1835 – 1900) (Figura 1.11(a)) e representa a superfície tridimensional adequada à modelagem da Geometria Hiperbólica, sendo essa de curvatura negativa com valor constante.

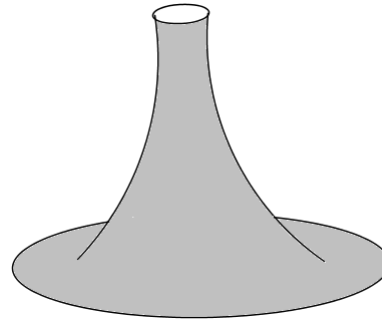
Como o modelo proposto por Beltrami era de difícil interpretação, outro modelo, desta vez no plano foi apresentado pelo matemático Felix Klein <sup>4</sup> (1849 – 1925) (Figura 1.12(a)). Para isto,

<sup>3</sup>geômetra italiano contribuiu para o trabalho em Geometria Diferencial de curvas e superfícies e deu uma realização concreta da Geometria não-Euclidiana.

<sup>4</sup>foi um matemático alemão. Seu trabalho incidiu na Geometria não-Euclidiana e nas interligações entre a



(a)



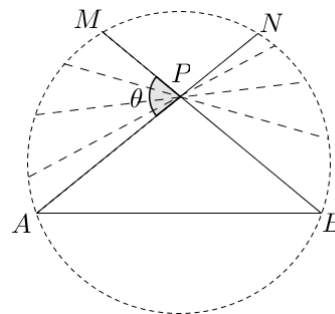
(b)

Figura 1.11: (a) Eugênio Beltrami. (b) Pseudo-esfera.

basta tomar um círculo no plano euclidiano, considerando apenas a região interior chamada de plano de Lobachevsky que representam as cordas do círculo, excluindo suas extremidades. Uma ilustração é dada pela Figura 1.12(b). Observe que por  $P$  traçam-se as retas  $PA$  e  $PB$  paralelas à reta  $AB$ . Com isso, as infinitas retas que passam por  $P$  e situadas no interior do ângulo  $\theta$ , são retas *não-secantes*. Sendo assim, as retas do plano lobachevskyano são cordas do círculo, excluindo-se suas extremidades.



(a)



(b)

Figura 1.12: (a) Felix Klein. (b) Modelo de Klein.

Para o modelo satisfazer os postulados de Lobachevsky, é preciso que as retas tenham uma extensão infinita dentro de uma área finita [12]. Esta dificuldade é vencida introduzindo-se uma unidade de medida variável, isto é, seu tamanho diminui na proporção que se aproxima da fronteira do plano (circunferência do círculo). Com essa ideia a extensão de uma reta (no

---

teoria dos grupos e a geometria.

modelo, uma corda) torna-se infinita, pois se insistirmos em medi-la, não conseguiremos atingir a extremidade da corda. Neste caso é como começarmos a medir a reta com meia unidade, e tal unidade de medida vai diminuindo, como uma progressão geométrica infinita de razão  $\frac{1}{2}$ , ou seja,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$  de modo que não conseguiríamos atingir a unidade.

Algumas características extraídas do modelo de Klein representando a Geometria Hiperbólica no plano ajudam entender alguns dos resultados (vide Figura 1.13):

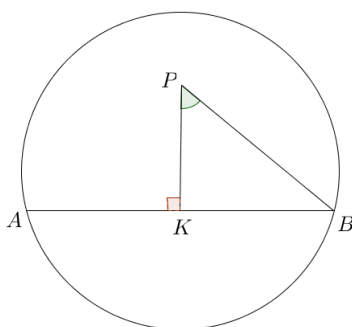


Figura 1.13: Consequências do modelo de Klein.

- (1) O ângulo de paralelismo é agudo (ângulo formado por uma das paralelas e a perpendicular de  $P$  a  $AB$ );
- (2) O ângulo de paralelismo é variável e depende da distância do ponto  $P$  à reta  $AB$ ;
- (3) Duas retas distintas e perpendiculares à reta  $AB$  formam um quadrilátero  $PQMK$  (Figura 1.14), que vem a ser o retângulo na Geometria Hiperbólica.

Um outro modelo conhecido como o disco de Poincaré foi criado pelo matemático francês Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) (Figura 1.15(a)). Neste modelo, a diferença em relação ao modelo de Klein está na representação das retas, as quais são arcos de círculos perpendiculares ao círculo, que representa o plano hiperbólico (Figura 1.15(b)).

Consequentemente os modelos apresentados nos dizem que: "*a soma dos ângulos internos de um triângulo hiperbólico (Figura 1.16) qualquer é menor que  $180^\circ$* ", fato este que contraria o triângulo euclidiano.

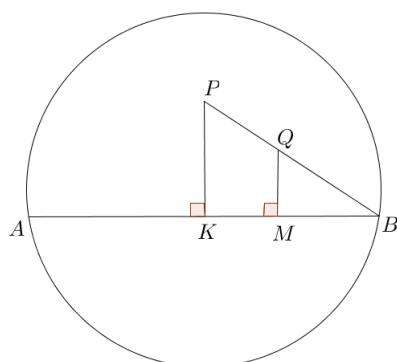
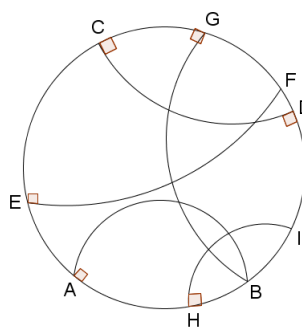


Figura 1.14: Quadrilátero no modelo de Klein.



(a)



(b)

Figura 1.15: (a) Jules Henri Poincaré. (b) Modelo de Poincaré.

## 1.5 Geometria Esférica.

Com o surgimento da Geometria Hiperbólica, questionamentos surgiram sobre a possibilidade outras geometrias. Assim, o matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann<sup>5</sup> (1826 – 1866) (Figura 1.17) contribuiu para a criação da chamada Geometria Esférica (ou Elíptica), que também ficou conhecida como Geometria de Riemann.

A fim de motivar esta Geometria podemos propor o seguinte desafio: desenhe um quadrado ou um triângulo numa folha de papel. Em seguida, recorte essa figura e tente colocá-la recobrendo uma bola de isopor ou qualquer outro objeto esférico; observe que não será possível apoiar toda a área do recorte feito, pois as propriedades das superfícies planas são diferentes

<sup>5</sup>Obteve o doutorado na Universidade de Göttingen, com uma tese no campo da teoria das funções complexas. Teve contribuições para Geometria não-Euclidiana daí para horizontes mais amplos como a relatividade geral [2].

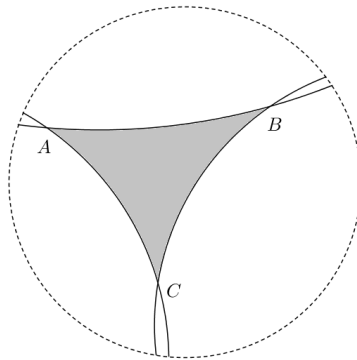


Figura 1.16: Triângulo hiperbólico.



Figura 1.17: Bernhard Riemann

das propriedades da superfície esférica. Outro fato é que dois pontos distintos determinam apenas uma reta na Geometria Euclidiana, enquanto na Geometria Esférica por dois pontos distintos existem infinitas retas que passam por eles. Desta forma, a Geometria Esférica admite todos os postulados da Geometria Euclidiana, com exceção do quinto postulado, sendo substituído pelo postulado de Riemann: *Por um ponto dado  $P$ , fora de uma reta  $r$ , não existe, paralela a esta reta  $r$ .* A Tabela 1.1 faz uma comparação entre as Geometrias: Euclidiana, Hiperbólica e Esférica.

Tabela 1.1: Comparação entre as Geometrias: Euclidiana, Hiperbólica e Esférica [4].

postulados e consequências	Geometria Euclidiana	Geometria Hiperbólica	Geometria Esférica
1º postulado:	Dois pontos determinam uma reta.	Idem	Dois pontos determinam uma ou mais de uma reta. (ex.: pólos de uma esfera.)
2º postulado:	Toda reta é infinita.	Idem	As retas são finitas.
3º postulado:	Um ponto (centro) e uma distância (raio) determinam um círculo.	Idem	Idem
4º postulado:	Todos os ângulos retos são iguais entre si.	Idem	Idem
5º postulado:	Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.	Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar mais de uma reta paralela à reta dada.	Por um ponto fora de uma reta não é possível traçar uma reta paralela à reta dada.
1ª consequência:	A soma dos ângulos internos de um triângulo é <b>igual</b> a dois ângulos retos ( $180^\circ$ ).	A soma dos ângulos internos de um triângulo é <b>menor</b> a dois ângulos retos ( $180^\circ$ ).	A soma dos ângulos internos de um triângulo é <b>maior</b> a dois ângulos retos ( $180^\circ$ ).
2ª consequência:	A razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência é igual a $\pi$ .	A razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência é maior do que $\pi$ . E aumenta com a área do círculo	A razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência é menor do que $\pi$ . E diminui com a área do círculo.

## Capítulo 2

### Conhecendo melhor a Geometria Esférica.

Inicialmente propomos duas situações problemas, com o intuito de introduzir os conceitos da Geometria Esférica. A primeira proposta foi extraída de Polya [16] e a segunda situação é adaptada do exemplo proposto em Coutinho [12]:

- (1) Um urso parte do ponto  $P$  e percorre um quilômetro no sentido Sul. Em seguida, muda de rumo e anda um quilômetro no sentido Leste. Finalmente, muda outra vez de rumo, percorre um quilômetro no sentido Norte e chega exatamente ao ponto de partida. Qual é a cor do urso?
- (2) Considere a situação hipotética: Um pescador leigo estava em alto mar, aconteceu uma tempestade e ele se perdeu, nesta ocasião um avião o avistou e passou as seguintes coordenadas para um navio que estava localizado na posição  $37^{\circ}10'N$  e  $5^{\circ}10'W$ . Atenção! Embarcação com alguém precisando de ajuda! Localização do pescador  $39^{\circ}15'N$  e  $2^{\circ}20'E$ . Qual é a distância que o navio deverá percorrer para salvar o pescador?

Em quais condições é possível acontecer a situação do problema (1)? Como explicar as condições ideais para satisfazer o problema (1) e encontrar um resultado satisfatório para o problema (2)?

As duas situações acima, apresentam uma provocação para iniciar o capítulo, no qual traremos sugestões de solução. Desta forma, a escolha da Geometria Esférica, vem devido ao fácil entendimento que esta propicia quando fazemos analogia com o Globo Terrestre. Tal entendimento leva, os estudantes a compararem aos conceitos da Geometria Euclidiana, bem como, as aplicações que estão diretamente ligadas a esta analogia. Isto irá facilitar a compreensão dos conceitos e ajudar a fazer uma interdisciplinaridade com outros campos do saber, através



da troca informações e possíveis atividades em conjunto. Na próxima seção iremos definir o conceito de esfera e sua relação com o Globo Terrestre.

## 2.1 Definindo a esfera e, entendendo alguns de seus elementos.

**Definição 2.1.** *Seja  $O$  um ponto do espaço e  $r$  um número real positivo. A **superfície esférica** é o lugar geométrico de pontos do espaço que mantém a mesma distância  $r$  do ponto fixo  $O$ , chamado de centro da esfera, e conseqüentemente  $r$  o raio da esfera (Figura 2.1).*

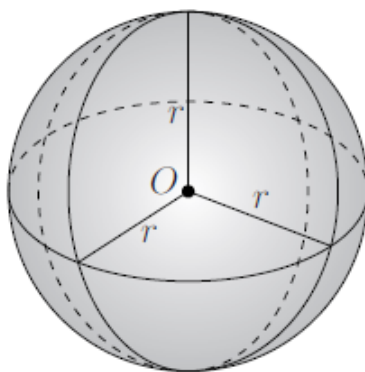


Figura 2.1: Esfera.

Os pontos do espaço cuja distância a  $O$  é menor que  $r$  são ditos **interiores** à superfície da esfera; aqueles cuja distância é maior que  $r$  são **exteriores** à mesma.

As posições relativas entre um plano e uma esfera, são definidas por: **tangente**, **secante** e **exterior**. No caso do plano **tangente**, existe um único ponto em comum que é perpendicular ao raio da esfera; no plano **secante** é gerado um círculo que intercepta a esfera. No caso deste plano passar pelo centro da esfera obtemos o círculo máximo. O plano **exterior** acontece se o plano não possui nenhum ponto em comum com a superfície da esfera.

**Definição 2.2.** *O **círculo máximo** é a interseção de um plano que passa pelo centro da esfera e a superfície esférica. É denominado a reta na superfície esférica.*

Nota-se que, o postulado das paralelas de Euclides não vale na Geometria Esférica [4], pois por um ponto  $P$  na superfície esférica fora de uma reta  $r$  (círculo máximo) não é permitido

traçar nenhuma paralela à reta dada. Assim, podemos notar que duas retas (círculos máximos) quaisquer possuem sempre dois pontos comuns e opostos pelo diâmetro.

Para fins de comparação iremos considerar esférico o planeta Terra, embora a mesma seja ligeiramente achatada nos pólos e aproximadamente um elipsóide de revolução [17]. Na Figura 2.2 os dois pontos em destaque  $N$  e  $S$  são chamados de pólos Norte e Sul, respectivamente e o eixo que liga estes pontos, *eixo polar*.

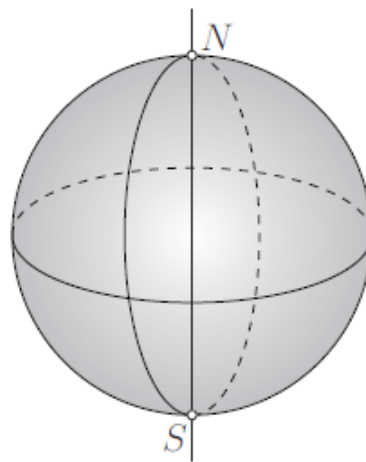


Figura 2.2: Eixo polar.

O intuito de definir alguns elementos do Globo Terrestre, tem como finalidade entender algumas aplicações da Geometria Esférica. Neste caso, faremos uma breve explanação sobre o significado de tais definições. Também, abordaremos sobre unidade de medida entre distâncias marítimas ou aéreas.

Inicialmente cada círculo máximo no Globo Terrestre que passa pelos Pólos Norte e Sul, determinam dois semi-círculos denominados de **meridianos**. Em especial, temos o **meridiano de Greenwich**<sup>1</sup>. Observe pela Figura 2.4 que o **Equador** também é um círculo máximo (e o único, considerando o plano perpendicular ao eixo polar passando pelo centro) além de dividir o Globo Terrestre em dois hemisfério Norte e Sul, e os demais círculos formados pela intersecção de planos paralelos ao equador são chamados de **paralelos** (em especial temos os **Trópicos de Capricórnio e Câncer**, e os **Círculos Polares Ártico e Antártico**) que não são círculos máximos.

---

<sup>1</sup>é o meridiano que passa sobre a localidade de Greenwich (no Observatório Real, nos arredores de Londres, Reino Unido) e que, por convenção, divide o globo terrestre em ocidente e oriente, permitindo medir a longitude.

O planeta Terra, possui um movimento em torno do eixo polar de Oeste para Leste, promovendo as sucessões entre dias e noites chamado de **rotação**. Para encontrar os pontos cardeais, é preciso observar que o Pólo Norte fica à frente de um observador que tenha a direção Leste à sua direita, onde a direção Leste é o nascer do sol. Desta forma, quando o dia está amanhecendo em Portugal, por exemplo, no Brasil ainda é noite e ainda vai amanhecer. Assim, sempre haverá uma diferença de horário entre dois lugares localizados em pontos diferentes no planeta e, quanto mais afastados estes dois pontos, maior a diferença. Suponhamos agora dois lugares diametralmente opostos no globo, enquanto em um deles é dia, no outro já será noite, com uma diferença de 12 horas.

A tarefa de localizar um ponto na superfície terrestre, requer uma precisão. Assim, possuímos um sistema de Coordenadas Geográficas denominadas **longitude** e **latitude**, similar ao Plano Cartesiano<sup>2</sup>, supondo o Equador como eixo das abscissas e o meridiano de Greenwich como eixo das ordenadas.

A latitude de um ponto  $P$  é a medida do arco de meridiano que passa por  $P$ , situado entre o paralelo que contém  $P$  e o Equador. Ela é uma medida angular  $\theta$  que pode ser expressa em graus, minutos e segundos. E, varia de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  N (Norte) ou de  $0^\circ$  a  $90^\circ$  S (Sul) (Figura 2.3).

A longitude de um ponto  $P$  é a medida do arco de paralelo que passa por  $P$ , situado entre o meridiano que contém  $P$  e o meridiano de Greenwich. Também por se tratar de medida angular,  $\varphi$  é expressa em graus, minutos e segundos, e varia de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  E (Leste) ou 0 a  $180^\circ$  W (Oeste) (Figura 2.3).

Os **fusos horários** são cada uma das vinte e quatro áreas em que se divide a Terra pelos meridianos. A denominação fuso nomeia a porção de superfície esférica compreendida entre dois semiplanos que partem de um diâmetro da esfera (neste caso o diâmetro do eixo polar), assemelhando-se à superfície externa de um gomo de laranja. Assim, cada fuso possui  $15^\circ$  de largura longitudinal, isto é,  $\frac{360^\circ}{24\text{partes}}$ , onde as 24 partes representam as 24 horas do dia (Figura 2.4).

Nesta Geometria, temos como elementos primitivos: o plano (superfície esférica); as retas (círculos máximos) e os pontos [4]. Sabemos da Geometria Euclidiana que a menor distância entre dois pontos  $A$  e  $B$  é obtida percorrendo-se o segmento de reta que une os dois pontos (Figura 2.5). No caso da Geometria Esférica, a reta é o círculo máximo e o segmento que une os

---

<sup>2</sup>criado pelo matemático René Descartes. Através dele podemos associar Geometria à Álgebra, composto por duas retas perpendiculares e orientadas: horizontal e vertical, chamados respectivamente de abscissa e ordenada.

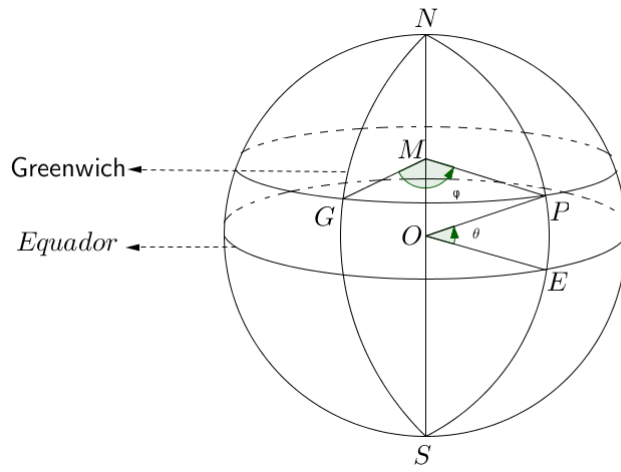


Figura 2.3: Latitude e longitude.

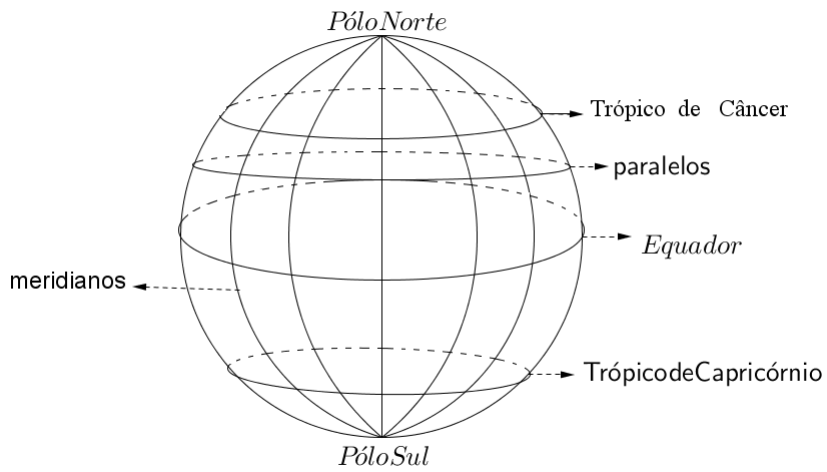


Figura 2.4: Globo Terrestre.

pontos  $A$  e  $B$ , é um arco do círculo máximo (Figura 2.6). Daí, a **distância na superfície esférica** dos pontos  $A$  e  $B$  é a menor porção do círculo máximo que contém esses pontos.

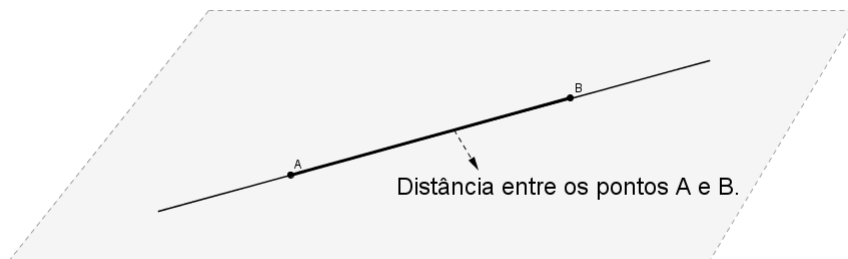


Figura 2.5: Plano euclidiano.

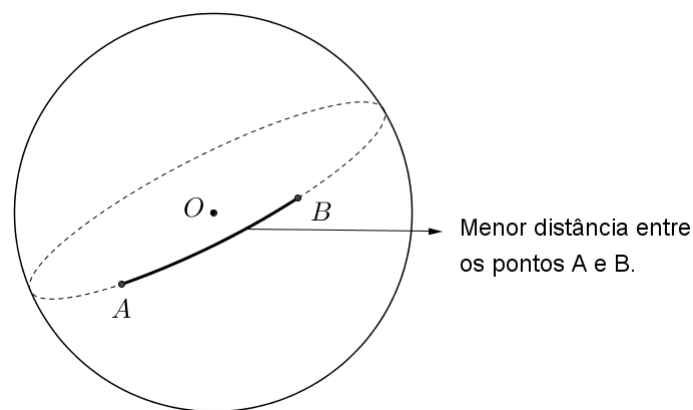


Figura 2.6: Plano esférico.

Para compreender melhor a definição de distância na superfície esférica, citamos um exemplo de uma trajetória de um vôo internacional: Uma aeronave que parte de Salvador-Brasil com destino a Lisboa-Portugal, não segue uma trajetória reta (em azul). Segue porém, a trajetória (em vermelho) correspondente a um arco de círculo máximo entre as duas cidades (vide Figura 2.7), sendo esta, a ideia de segmento na superfície esférica.

A fim de medir trajetórias como no exemplo anterior, utilizamos unidades de medidas marítimas e aéreas chamadas de **Milha Marítima** ou **Milha Náutica**. Apesar de não fazer parte do Sistema Internacional, estas unidades são utilizadas pela Marinha e Aeronáutica, além de profissionais que utilizam meios de transportes marítimos e aéreos.



Figura 2.7: Trajetória Salvador-Lisboa.

A **Milha Marítima** ou **Milha Náutica**, corresponde ao arco de meridiano de um minuto. Assim, quando o navio ou uma aeronave percorre ao longo do círculo máximo, uma distância de  $1^\circ$ , cobre um percurso de 60 milhas marítimas. Como a Terra não é uma esfera perfeita, os círculos máximos se aproximam de elipses, quando próximos aos pólos é menos curvos do que quando medido nas proximidades do Equador. Para se evitar estas diferenças, estabeleceu-se a **Milha Marítima Internacional** de  $1.852m$ , que é a média das milhas medidas no equador e no pólo [12].

### 2.1.1 Relação entre o arco de paralelo e o correspondente arco do Equador.

Iremos estabelecer algumas relações entre os elementos no Globo Terrestre, para melhor comparar as distâncias na superfície esférica e poder concluir sobre o melhor percurso a fazer durante um trajeto. Assim, a seguir vamos definir e estabelecer uma relação entre o arco de paralelo e o correspondente arco do equador.

O arco de paralelo é a menor porção do círculo correspondente ao paralelo (círculo perpendicular ao eixo-polar, distinto do Equador). Enquanto, arco do Equador é a menor porção do círculo correspondente ao Equador.

É importante perceber que, como os meridianos convergem nos pólos, os mesmos se interceptam por vários paralelos e à medida que aumenta a latitude de um paralelo, é menor a distância entre dois meridianos. Veremos a seguir uma relação entre um arco de paralelo e o correspondente arco do Equador. Na Figura 2.8, temos um arco  $ab$  paralelo, ao arco  $AB$  situado

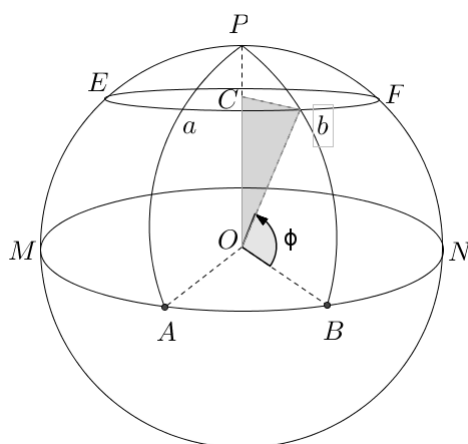


Figura 2.8: Arco paralelo.

no Equador. Temos ainda,  $OP = OB = OA = R$  raio da Terra, onde  $OP$  é perpendicular a  $Cb$  raio do paralelo. Com isso o triângulo  $\Delta COb$  é retângulo em  $C$ , e podemos escrever:

$$Cb = Ob \cdot \sin(90^\circ - \phi)$$

ou

$$Cb = Ob \cdot \cos(\phi) \tag{2.1}$$

Além disso,

$$\frac{\text{arco de paralelo } ab}{\text{arco do Equador } AB} = \frac{\text{raio do paralelo } Cb}{\text{raio da Terra } OB}$$

ou

$$\frac{ab}{AB} = \frac{Cb}{OB} \tag{2.2}$$

Como  $OB = Ob$ , combinando 2.1 e 2.2, temos:

$$ab = AB \cdot \cos(\phi) \tag{2.3}$$

## 2.2 Triângulos esféricos

O estudo dos triângulos esféricos será importante na Geometria Esférica, pois através deles podemos encontrar distância entre dois pontos quaisquer na superfície esférica. Iremos agora definir e estabelecer algumas relações entre os elementos deste triângulo.

**Definição 2.3.** Sejam  $A, B$  e  $C$  três pontos distintos sobre uma esfera e não pertencentes ao mesmo círculo máximo. A figura formada pelos arcos de círculos máximos que une esses pontos dois a dois é denominado **triângulo esférico** (vide Figura 2.9).

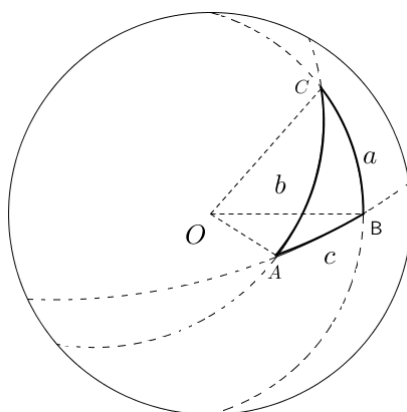


Figura 2.9: Triângulo esférico.

Na Figura 2.9, os lados  $BC$ ,  $AC$  e  $AB$  do triângulo esférico são escritos, respectivamente, por  $a$ ,  $b$  e  $c$ , e medidos pelos ângulos subtendidos por eles no centro da esfera (podendo ser em graus ou radianos) sendo definido pelo ângulo do setor circular determinado por dois vértices e o centro da esfera. E, os ângulos do triângulo  $ABC$  são os ângulos esféricos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , que podem ser reescritos como  $\hat{BAC}$ ,  $\hat{ABC}$  e  $\hat{ACB}$ .

Além disso, os triângulos esféricos possuem três: alturas, bissetrizes internas, medianas. Com a mesma definição dos triângulos planos.

**Ângulo Didero ou Diedros** - duas retas que se interceptam determinam quatro ângulos planos. E dois planos que se interceptam determinam quatro ângulos diedros (vide Figura 2.10). Onde podemos destacar o diedro  $A - BC - D$ , os planos  $ACB$  e  $DCB$  são chamados faces e a linha  $BC$  aresta do diedro. E, o ângulo plano formado por duas linhas situadas, cada uma, numa das faces do diedro,  $EF$  e  $GF$ , perpendiculares à aresta, chama-se ângulo plano do diedro (fornece a medida do ângulo diedro). **Ângulos triedros ou Triedros** - Quando três planos têm um, e apenas um, ponto comum, eles determinam oito ângulos triedros. Analisando o ângulo triedro  $O - XYZ$  (Vide figura 2.11). Temos: o ponto comum  $O$  é chamado *vértice* e os planos  $OXY$ ,  $OYZ$  e  $OZX$ , faces do triedro. As faces, consideradas aos pares, formam três ângulos diedros cujas arestas são  $OX$ ,  $OY$  e  $OZ$ . Os ângulos planos  $\widehat{XOY}$ ,  $\widehat{OYZ}$  e  $\widehat{OZX}$  são chamados *ângulos das faces do triedro* ou, simplesmente *faces*.



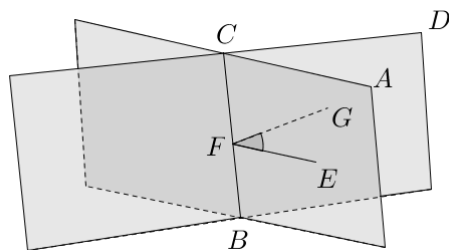


Figura 2.10: Ângulos diedros ou Diedros.

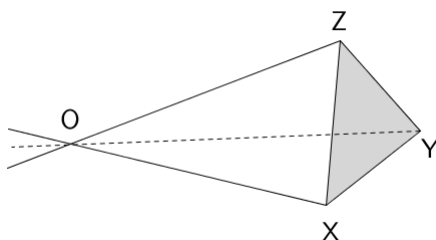


Figura 2.11: Ângulos triedros ou Triedros.

### 2.2.1 Propriedades dos triângulos esféricos.

- (1) A soma dos ângulos de duas faces quaisquer de um ângulo triedro é maior do que o ângulo da terceira face;
- (2) A soma dos três lados de um triângulo esférico é maior que  $0^\circ$  e menor que  $360^\circ$ , ou seja,  $0^\circ < a + b + c < 360^\circ$ ;
- (3) A área de um triângulo esférico é dada pela fórmula:

$$S = R^2[(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) - \pi] = R^2 \cdot E$$

sendo  $E$  o excesso esférico que representa o valor que a soma dos ângulos internos do triângulo esférico excede a  $180^\circ$ ;

- (4) A soma dos três ângulos internos de um triângulo esférico é maior que dois ângulos retos e menor que seis ângulos retos, ou seja,  $\pi < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 3\pi$ ;
- (5) Dois lados de um triângulo esférico são iguais, se e somente se, os ângulos opostos também

são iguais:

$$a = b \Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B}$$

(6) Ao maior lado se opõe o maior ângulo e vice-versa;

(7) A soma de dois ângulos é menor que o terceiro acrescido de  $180^\circ$  e a diferença é menor que o suplemento do terceiro:

$$\widehat{A} + \widehat{B} < \widehat{C} + 180^\circ$$

$$\widehat{A} - \widehat{B} < 180^\circ - \widehat{C}$$

Para as demonstrações das Propriedades 1-2, considere a Figura 2.12 (vide [18]):

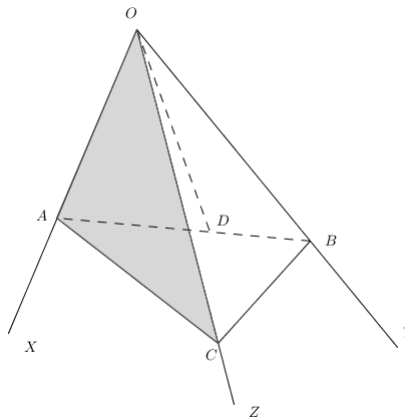


Figura 2.12: Ângulo triedro.

**Demonstração** (Propriedade 1): Caso os três ângulos das faces sejam iguais, o teorema é verdadeiro. Considere agora um ângulo triedro  $O - XYZ$  no qual a face  $\widehat{XOY}$  é maior do que as outras duas,  $\widehat{YOZ}$  e  $\widehat{XOZ}$ . Sobre  $OX$  tome um ponto  $A$  qualquer; sobre  $OY$  tome um ponto  $B$  e sobre  $AB$  um ponto  $D$  de modo que  $\widehat{AOD} = \widehat{XOZ}$ . Sobre  $OZ$  tome  $C$  de modo que  $OC = OD$ . Unindo-se  $A$  e  $B$  a  $C$  obtemos o triângulo  $ABC$  no qual  $AC + CB > AD + DB$ . Uma vez que os triângulos  $AOC$  e  $AOD$  são congruentes (caso  $LAL$ ),

$$AD = AC \implies AC + CB > AC + DB \text{ e } CB > DB.$$

Assim os lados  $OD$  e  $OB$  do triângulo  $ODB$  são iguais, respectivamente, aos lados  $OC$  e  $OB$  do triângulo  $OCB$ ,  $\widehat{COB} > \widehat{DOB}$ . Onde temos,

$$\widehat{AOC} + \widehat{COB} > \widehat{AOD} + \widehat{DOB} = \widehat{AOB}. \square$$

**Demonstração** (Propriedade 2): Nas arestas do ângulo triedro,  $O - XYZ$  tomemos os pontos  $A, B$  e  $C$  (vide Figura 2.12). Note que há três triângulos com o vértice  $O$  e que a soma dos ângulos desses triângulos é  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ ; isto é,  $(\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA}) + (\widehat{OAB} + \widehat{OAC}) + (\widehat{OBA} + \widehat{OBC}) + (\widehat{OCA} + \widehat{OCB}) = 540^\circ$ , pela Propriedade 1, temos:

$$\begin{aligned} \widehat{OAB} + \widehat{OAC} &> \widehat{BAC}, \\ \widehat{OBA} + \widehat{OBC} &> \widehat{ABC}, \\ \widehat{OCA} + \widehat{OCB} &> \widehat{ACB}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Com isso:

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA} + \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} < 540^\circ$$

ou

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA} < 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ. \square$$

**Demonstração** (Propriedade 3): De fato, sabe-se que um triângulo esférico (Figura 2.13) é formado por três pontos ligados por arcos de círculos máximos. Se estes arcos forem prolongados, forma-se outro triângulo esférico que pode ser obtido por uma reflexão do original pelo centro da esfera. Por simetria, os dois triângulos têm áreas iguais.

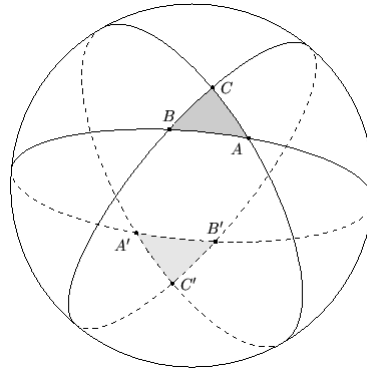


Figura 2.13: Triângulo esférico.

Se representarmos a área da esfera como uma soma de diedros convenientemente escolhidos, em cada vértice do triângulo, obtemos dois diedros (Figura 2.14).

Representando a área da esfera como a soma das áreas desses diedros obtém-se

$$S_{esfera} = 2S_{AA'} + 2S_{BB'} + 2S_{CC'} - 4S_{ABC} \tag{2.5}$$

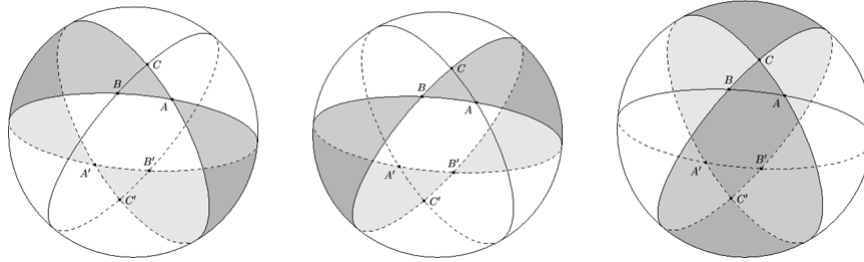


Figura 2.14: Superfícies esféricas limitadas por diedros.

Nota-se que a área da superfície esférica delimitada pelo diedro é proporcional ao ângulo diedro. Como a área da esfera é  $4\pi R^2 = 2 \cdot (2\pi) \cdot R^2$ , analogamente obtém-se que a superfície de um diedro com ângulo  $\alpha$  é  $2\alpha R^2$ . Portanto de (2.5) conclui-se que:

$$4\pi R^2 = 2R^2 \cdot (2\hat{A} + 2\hat{B} + 2\hat{C}) - 4S_{ABC}.$$

Logo,

$$S_{ABC} = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)R^2. \square$$

**Demonstração** (Propriedade 4): A área mínima de um triângulo esférico é quando esta área tende a zero. Considerando essa área como sendo zero, tem-se  $S_{ABC} = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)R^2 = 0$ , com  $R \neq 0$  e, portanto,  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$ . Logo, para qualquer  $R \neq 0$ , temos:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > \pi$ .

A área máxima de um triângulo esférico tende a uma semi-esfera (área da semi-esfera  $2\pi R^2$ ). Considerando que  $S_{ABC} = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi)R^2 = 2\pi R^2 \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = 2\pi \therefore \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 3\pi$ . Logo  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 3\pi$ .  $\square$

As demais propriedades (5), (6) e (7) possuem deduções intuitivamente claras e por isso terão suas demonstrações omitidas.

Voltando para o teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico na propriedade (4), podemos notar que o triângulo  $PAB$  (vide figura 2.15) tem  $AB$  sobre o Equador,  $PA$  sobre o Meridiano de Greenwich e  $PB$  sobre o meridiano  $90^\circ$ ,  $P$  situado no pólo Norte. Como os meridianos são perpendiculares ao Equador, os ângulos  $A$  e  $B$  são retos. Além disso os meridianos formam um ângulo de  $90^\circ$  no pólo Norte. Logo, podemos concluir que  $A + B + C = 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 270^\circ$ . Esse triângulo é conhecido como o triretângulo (vide Figura 2.15) e ocupa a oitava parte da esfera.

Os triângulos esféricos podem ter a seguinte classificação:

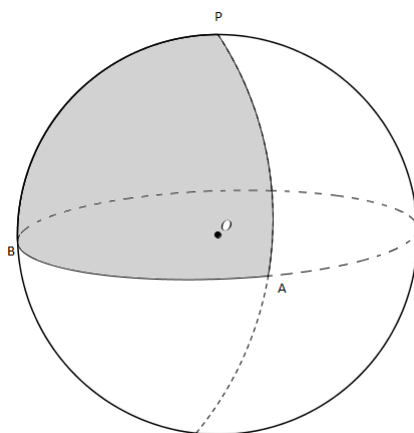


Figura 2.15: Triângulo esférico com 3 ângulos retos.

- Quanto aos ângulos:
  - 1: Retângulo - um ângulo reto.
  - 2: Birretângulo - dois ângulos retos.
  - 3: Trirretângulo - os três ângulos retos.
- Quanto aos lados:
  - 1: Retilátero - um lado medindo  $90^\circ$ .
  - 2: Birretilátero - dois lados medindo  $90^\circ$ .
  - 3: Trirretilátero - cada um dos lados medindo  $90^\circ$ .

Observamos que se um triângulo esférico é trirretângulo, então é também triretilátero e ocupa exatamente a oitava parte da superfície esférica. Uma das características da Geometria Esférica que mais diferencia da Geometria de Euclides, é o fato de não existir a noção de semelhança, ou seja, não podemos num plano esférico, desenhar duas figuras que tenham a mesma proporção. Neste caso, não podemos encontrar um triângulo esférico que seja maior do que outro, e que tenha os mesmos ângulos.

Desta forma, a Geometria Esférica não admite a semelhança entre triângulos. Temos apenas congruência entre triângulos. Isto acontece pois a área de um triângulo esférico depende

apenas da soma dos seus ângulos internos, na esfera todos os triângulos com ângulos congruentes têm a mesma área; logo, são congruentes. Portanto, na Geometria Esférica não existem triângulos com a mesma forma e áreas diferentes.

A partir das propriedades anteriores será possível deduzir algumas fórmulas que irão nos ajudar a encontrar relações entre ângulos e lados do triângulo esférico (Figura 2.16).

**Proposição 2.1. Fórmula Fundamental:**

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(A) \quad (2.6)$$

**Demonstração:** Seja o triângulo esférico  $ABC$  da esfera de centro  $O$  e lados  $a, b$  e  $c$ , sendo expressos, pela medida dos ângulos planos  $\widehat{BOC}, \widehat{AOC}, \widehat{AOB}$ . As retas tangentes  $t_1$  e  $t_2$  aos círculos máximos  $AB$  e  $AC$  são, ambas, perpendiculares ao raio  $OA$  da esfera. A partir dos prolongamentos dos raios  $OB$  e  $OC$  encontram-se as tangentes  $t_1$  e  $t_2$  nos pontos  $D$  e  $E$ , formando com isso o triângulo plano  $ADE$ .

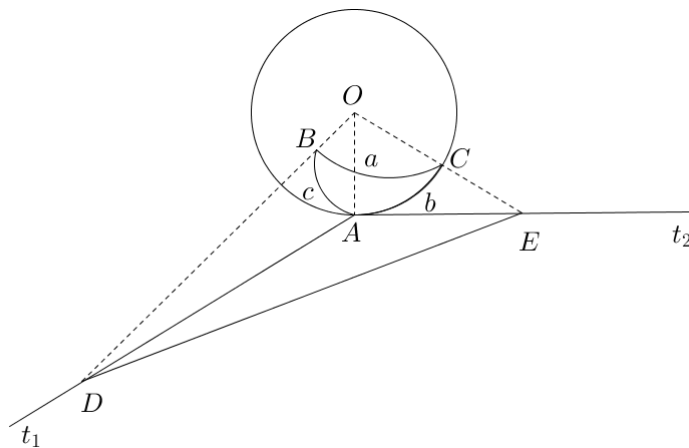


Figura 2.16: Triângulo esférico

De acordo a Figura 2.16, observam-se quatro triângulos planos, dois deles retângulos em  $A$  ( $OAD$  e  $OAE$ ). Em virtude disto, escrevemos as relações no triângulo retângulo  $AOD$ :

$$\overline{AD} = \overline{OA} \cdot \tan(\widehat{BOA})$$

e

$$\overline{OD} = \overline{OA} \cdot \sec(\widehat{BOA}).$$

Como  $B\hat{O}A$  mede o lado  $c$  do triângulo, resulta:

$$\begin{aligned}\overline{AD} &= \overline{OA} \cdot \tan(c), \\ \overline{OD} &= \overline{OA} \cdot \sec(c).\end{aligned}\tag{2.7}$$

No caso do triângulo retângulo  $AOE$  segue:

$$\overline{AE} = \overline{OA} \cdot \tan(A\hat{O}C)$$

e

$$\overline{OE} = \overline{OA} \cdot \sec(A\hat{O}C),\tag{2.8}$$

ou:

$$\begin{aligned}\overline{AE} &= \overline{OA} \cdot \tan(b), \\ \overline{OE} &= \overline{OA} \cdot \sec(b).\end{aligned}\tag{2.9}$$

No triângulo  $DAE$ :

$$\overline{DE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AE}^2 - 2\overline{AD} \cdot \overline{AE} \cdot \cos(D\hat{A}E).\tag{2.10}$$

Agora considerando a esfera de raio unitário, escreve-se esta última relação em termos trigonométricos:

$$\overline{DE}^2 = \tan^2(c) + \tan^2(b) - 2 \tan(b) \cdot \tan(c) \cdot \cos(A)\tag{2.11}$$

onde  $D\hat{A}E$  mede o ângulo esférico  $\hat{A}$  do triângulo  $ABC$ . Do triângulo  $DOE$ , temos:

$$\overline{DE}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{OE}^2 - 2\overline{OD} \cdot \overline{OE} \cdot \cos(D\hat{O}E).$$

Fazendo a mesma consideração e lembrando que o ângulo  $D\hat{O}E$  mede o lado  $a$  do triângulo esférico  $ABC$ , escrevemos:

$$\overline{DE}^2 = \sec^2(c) + \sec^2(b) - 2 \cdot \sec(b) \sec(c) \cos(a)\tag{2.12}$$

Utilizando as relações (2.11) e (2.12), reescrevemos:

$$\sec^2(c) + \sec^2(b) - 2 \cdot \sec(b) \sec(c) \cos(a) = \tan^2(c) + \tan^2(b) - 2 \tan(b) \cdot \tan(c) \cdot \cos(A)\tag{2.13}$$

Porém,

$$\sec^2(c) = 1 + \tan^2(c), \quad \sec^2(b) = 1 + \tan^2(b).$$

Logo a relação (2.13) assume a expressão:

$$1 + \tan^2(c) + 1 + \tan^2(b) - 2 \sec(b) \sec(c) \cos(a) = \tan^2(c) + \tan^2(b) - 2 \tan(b) \tan(c) \cos(A),$$

implicando

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\cos(b)} \cdot \frac{1}{\cos(c)} \cdot \cos(a) &= -\frac{\sin(b)}{\cos(b)} \cdot \frac{\sin(c)}{\cos(c)} \cdot \cos(A) \\ \cos(b) \cos(c) - \cos(a) &= -\sin(b) \sin(c) \cos(A) \\ \implies \cos(a) &= \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(A). \square \end{aligned}$$

### 2.2.2 O teorema de Pitágoras na Geometria Esférica.

O título acima sugere uma pergunta: como será o teorema de Pitágoras na Geometria Esférica? O teorema de Pitágoras é derivado dos postulados da Geometria Euclidiana (relação esta, que envolve os lados de um triângulo retângulo plano), e, de fato, a versão Euclidiana não é válida nas Geometrias não-Euclidianas. Portanto, não temos o Teorema de Pitágoras na Geometria Esférica.

Podemos estabelecer uma relação entre os lados de um triângulo esférico retângulo a partir da fórmula fundamental. E, terá uma notação diferente da Euclidiana. Caso, consideremos um triângulo esférico retângulo em  $A$ , a fórmula fundamental (2.6) terá a seguinte notação

$$\cos(a) = \cos(b) \cos(c).$$

Sendo esta a relação que envolve os lados do triângulo retângulo esférico.

### 2.3 Relação entre o número $\pi$ e o diâmetro do círculo.

Agora, analisemos a constante  $\pi$ , que na geometria de Euclides é a razão entre o comprimento  $c$  e o diâmetro  $d$  de um círculo, ou seja,  $\pi = \frac{c}{d}$ , isto é,  $c = \pi \cdot d$ . (Figura 2.17). Consideremos um caso particular da Geometria Esférica (Figura 2.18):

- $D$  - diâmetro do círculo na Geometria Esférica;
- $d$  - diâmetro do círculo na Geometria Euclidiana;



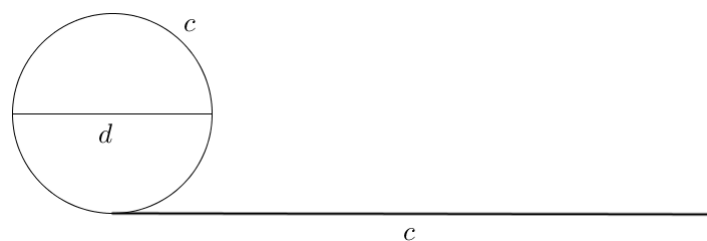


Figura 2.17: Cálculo do número  $\pi$ .

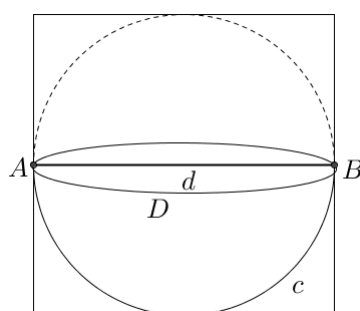


Figura 2.18: Cálculo de  $\pi$  na Geometria Esférica.

- $c$  - comprimento da circunferência.

Seja

$$D > d \Rightarrow \frac{c}{D} < \frac{c}{d} = \pi \therefore \frac{c}{D} < \pi \square$$

O que podemos observar que a razão entre o comprimento da circunferência dada e o seu diâmetro esférico é menor que  $\pi$  [4]. Além disso, as Geometrias tanto Hiperbólica, Esférica e Euclidiana são casos particulares de uma geometria curva geral. No caso da Geometria Euclidiana, a curvatura do espaço é nula, enquanto na Geometria Hiperbólica a curvatura é negativa e na Geometria Esférica a curvatura é positiva. No próximo capítulo, apresentaremos algumas aplicações da Geometria Esférica.

## Capítulo 3

# Aplicações da Geometria Esférica.

A fim de motivar a introdução das Geometrias não-Euclidianas na educação básica, buscaremos propor algumas aplicações extraídas de [16, 12, 19, 18], trazendo comparações com a Geometria Euclidiana, percebendo as suas diferenças. Retomaremos agora, as situações problema do início do capítulo anterior. Assim segue:

**Situação Problema 3.1.** *Um urso parte do ponto  $P$  e percorre um quilômetro no sentido Sul. Em seguida, muda de rumo e anda um quilômetro no sentido Leste. Finalmente, muda outra vez de rumo, percorre um quilômetro no sentido Norte e chega exatamente ao ponto de partida. Qual é a cor do urso? Nesta situação temos são pedidos os seguintes itens:*

1. *Desenhar numa folha de papel o caminho percorrido pelo urso.*
2. *De acordo com a situação acima é possível que o urso volte ao ponto de partida? Anote suas conclusões.*
3. *Desenhar numa bola de isopor o caminho percorrido pelo urso.*
4. *Analizando o caminho desenhado na bola de isopor, é possível para o urso voltar ao mesmo ponto de partida?*

Este problema, além de fazer conexões com a Geografia, sobre pontos cardeais (Norte, Sul, Oeste e Leste), procura refletir sobre a nossa percepção a respeito superfícies plana e esférica. Gerando assim um debate sobre a representação do Globo Terrestre e do plano euclidiano. No caso da folha de papel (Figura 3.1), é possível perceber que sempre ficarão duas retas paralelas, enquanto na bola de isopor (Figura 3.2), os círculos máximos irão encontrar-se nos pólos. Tal

situação só é possível na Geometria Esférica. Onde o urso parte do pólo norte e a cor do urso é branca.

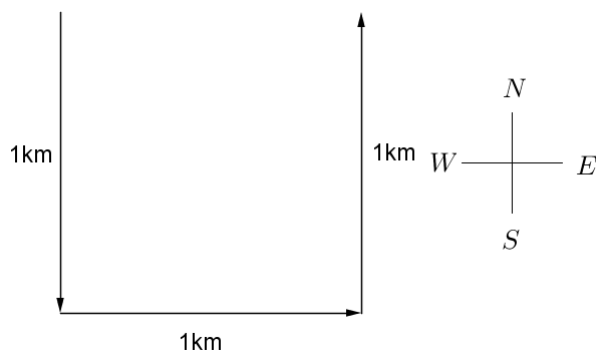


Figura 3.1: Problema 3.1 na folha de papel.

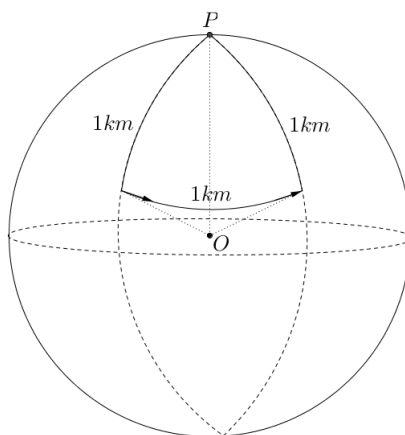


Figura 3.2: Problema 3.1 na bola de isopor.

**Situação Problema 3.2.** *Agora imagine a situação hipotética, que um caçador, resolveu sair de casa e caminhar em linha reta infinitamente.*

1. *Desenhe o caminho percorrido pelo caçador numa folha de papel.*
2. *De acordo com o caminho percorrido desenhado na folha de papel, é possível para o caçador voltar no ponto de partida?*
3. *Desenhe o caminho percorrido pelo caçador numa bola de isopor.*

4. De acordo com o caminho percorrido desenhado na bola de isopor, é possível para o caçador voltar ao ponto de partida?
5. Anote suas conclusões.

Esta atividade ajuda a compreender, através de material concreto (bola de isopor, papel, caneta), a diferença de uma reta na superfície plana e na superfície esférica, que chamamos de círculo máximo. Permite entender o conceito de Geodésica na superfície esférica que é a menor distância que une dois pontos. Também leva a refletir que uma reta na Geometria Euclidiana é infinita, enquanto na Geometria Esférica é finita, e corresponde ao círculo máximo da esfera.

**Situação Problema 3.3.** *Agora suponha que o caçador caminhe em linha reta da sua casa até a floresta a uma distância de 10km.*

1. Desenhe numa folha de papel o caminho percorrido pelo caçador.
2. Desenhe numa esfera o caminho percorrido pelo caçador e represente esse desenho na folha de papel.
3. Qual é a diferença entre os dois desenhos? Anote suas conclusões.

Esta situação leva à discussão sobre a distância entre pontos, e expõe o estudante a duas situações concretas, das quais conclui-se que a menor distância é dada pela medida do segmento AB enquanto na Geometria Esférica é uma porção do círculo máximo.

**Situação Problema 3.4.** *Considere a seguinte situação hipotética: Como seriam as trajetórias de dois barcos navegando por um longo percurso, de modo que mantenham sempre a mesma distância um do outro? Explique e justifique.*

1. Desenhe numa folha de papel o caminho percorrido pelos dois barcos.
2. Desenhe numa bola de isopor o caminho percorrido pelos dois barcos.
3. É possível traçar retas paralelas para representar o caminho percorrido pelos dois barcos na folha de papel e na bola de isopor?
4. Anote suas conclusões.

Uma constatação que a situação acima torna evidente, é a negação do quinto postulado euclidiano, com a seguinte ideia: Por um ponto  $P$  qualquer, fora de uma reta  $r$ , não passa nenhuma reta paralela a  $r$ . Neste caso, todos os círculos máximos de uma superfície esférica sempre se cruzam em pelo menos dois pontos. Assim, os navios irão encontrar-se no ponto diametralmente oposto ao início do trajeto.

**Situação Problema 3.5.** *Construa as figuras, como indicado abaixo.*

1. *Desenhe um triângulo qualquer numa folha de papel e com um transferidor meça seus ângulos e anote os resultados.*
2. *Desenhe um triângulo qualquer numa bola de isopor e com um transferidor meça seus ângulos e anote os resultados.*

Além, de comparar o triângulo nas duas superfícies, é possível observar que a soma dos ângulos do triângulo esférico é maior que  $180^\circ$ .

O problema a seguir mostra que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico, além de ser maior que  $180^\circ$ , não é constante.

**Situação Problema 3.6.** *Construa com fios elásticos um triângulo na superfície da bola de isopor. Faça as conjecturas da situações abaixo.*

1. *O que acontecerá com os ângulos se afastarmos progressivamente os vértices?*
2. *Quanto medirá os ângulos quando se inscreverem sobre um equador da esfera?*
3. *Quanto medirá a soma desses ângulos?*

Esta atividade propõe conjecturar e comparar os resultados obtidos e entender melhor as propriedades da soma dos ângulos internos dos triângulos esféricos.

**Situação Problema 3.7.** *Utilizando uma bola de isopor, desenhe dois círculos máximos perpendiculares e desenhe um terceiro círculo máximo, perpendicular aos dois já construídos.*

1. *Em quantos triângulos a bola ficou dividida?*
2. *Quanto mede cada ângulo desses triângulos?*
3. *Qual a soma dos ângulos internos desses triângulos?*

4. Como é classificado esse triângulo esférico de acordo com seus lados e seus ângulos?

Nesta situação é necessário relembrar noções de perpendicularismo, além de propor uma discussão sobre a classificação dos triângulos esféricos.

**Situação Problema 3.8.** Para identificarmos a localização de um ponto no plano, é necessário conhecer duas referências, no caso da Geometria Euclidiana, temos o plano cartesiano, e as duas referências são as coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$ . No Globo Terrestre, como um ponto pode ser localizado?

1. Localize e determine, no Globo Terrestre, aproximadamente, a posição da Ilha de Fernando de Noronha-PE e da Morro de São Paulo (Ilha de Tinharé-BA).
2. O Globo Terrestre possui um eixo de rotação imaginário. Como se chamam as interseções do Globo Terrestre com esse eixo?
3. Localize e caracterize o Equador.
4. Identifique quais tipos de círculos você pode observar na superfície do Globo Terrestre.
5. Quais dos círculos são círculos máximos?
6. Quais dos círculos são denominados paralelos terrestres?
7. Quais dos círculos são denominados meridianos?

A proposta a seguir é familiarizar os estudantes com as coordenadas geográficas: latitude e longitude, além de identificar os elementos da esfera na superfície do Globo Terrestre.

**Situação Problema 3.9.** Encontre a diferença entre as longitudes:

1. Rio de Janeiro ( $\lambda_2 = 43^\circ 11'$ ) e Pearl Harbour ( $\lambda_1 = 157^\circ 58,3'$ ).
2. Rio de Janeiro e Moscou ( $\lambda_1 = 37^\circ 34,3'$ ).
3. Rio de Janeiro e Sydney ( $\lambda_1 = 151^\circ 13,0'$ ).
4. Sydney e Moscou.

Para encontrar as distâncias entre as longitude, basta fazer as operações a seguir:

1.  $\lambda_1 - \lambda_2 = 157^\circ 58,3' - 43^\circ 11' = 114^\circ 47,3' = 6887,3'$ , uma vez que ambas estão à Oeste de Greenwich.
2.  $\lambda_1 + \lambda_2 = 37^\circ 34,3' + 43^\circ 11' = 80^\circ 45,3' = 4845,3'$ , uma vez que uma é Leste e a outra é Oeste de Greenwich.
3.  $360^\circ - (43^\circ 11' + 151^\circ 13,0') = 165^\circ 35,7' = 9935,7'$ .
4.  $\lambda_1 - \lambda_2 = 151^\circ 13,0' - 37^\circ 34,3' = 113^\circ 38,7' = 6818,7'$ .

**Situação Problema 3.10.** *Dois navios, ambos na latitude  $23^\circ N$ , estão afastados um do outro 420 milhas marítimas. Se os dois navios, com a mesma velocidade, navegam rumo ao norte, 1.927 milhas, qual a nova distância entre eles depois do percurso?*

Para desenvolver este problema é necessário o conhecimento da relação entre o arco do círculo máximo e um arco paralelo ao mesmo (2.3). Observando as informações do problema temos que a distância de 1.927 milhas percorridas pelos navios equivale a um arco de meridiano de  $32^\circ 07'$ , o que podemos escrever:

- Latitude de saída:  $23^\circ 00' N$
- Arco navegado ou  $\Delta\phi = 32^\circ 07' N$ ;
- Latitude final:  $55^\circ 07' N$

Como os navios na saída estavam no paralelo  $23^\circ$ , o correspondente arco do Equador  $XY$  em milhas vem a ser:

$$XY = 420 \cdot \sec(23^\circ) \implies XY = 420 \cdot 1,08636 \implies XY = 456,27.$$

A nova distância procurada entre eles é dado por:

$$x = 456,27 \cdot \cos(55^\circ 07') \implies x = 456,27 \cdot 0,57191 \implies x = 261 \text{ milhas.}$$

Portanto, a nova distância procurada é de 261 milhas.

**Situação Problema 3.11.** *Coutinho [12][adaptado]: Considere a situação hipotética: Um pescador leigo estava em alto mar, aconteceu uma tempestade e ele se perdeu, nesta ocasião um avião o avistou e passou as seguintes coordenadas para um navio que estava localizado na posição  $37^\circ 10' N$  e  $5^\circ 10' W$ . Atenção! Embarcação com uma pessoa precisando de ajuda! Localização do pescador  $39^\circ 15' N$  e  $2^\circ 20' E$ . Qual é a distância que o navio deverá percorrer para salvar o pescador?*

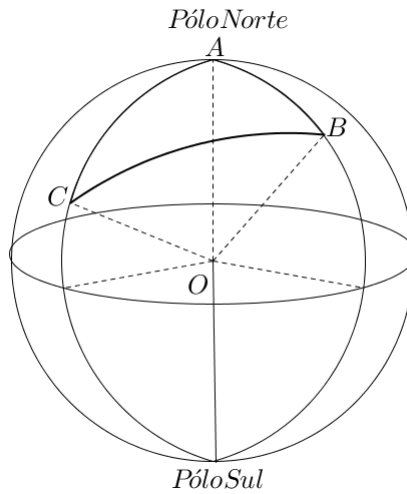


Figura 3.3: Encontrando a distância na superfície esférica

Para encontrar a solução deste problema é necessário rever a equação (2.6). Considerando o triângulo esférico (Figura 3.3), notamos que o ponto  $A$  está situado no polo Norte, o ponto  $B$  é a localização do navio e o ponto  $C$  é a localização do pescador. Assim:

- O lado  $AB = c = 90^\circ - 37^\circ 10' = 52^\circ 50'$ ;
- O lado  $AC = b = 90^\circ - 39^\circ 15' = 50^\circ 45'$ ;
- O ângulo  $A = 5^\circ 10' + 2^\circ 20' = 7^\circ 30'$ .

Aplicando a fórmula fundamental (2.6), temos:

$$\begin{aligned}
 \cos(a) &= \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(A) \\
 &= \cos(50^\circ 45') \cos(52^\circ 50') + \sin(50^\circ 45') \sin(52^\circ 50') \cos(7^\circ 30') \\
 &= 0,632705328 \cdot 0,60413561 + 0,774392644 \cdot 0,796881524 \cdot 0,991444861 \\
 &= 0,382239819 + 0,611819821 \\
 &= 0,99405964,
 \end{aligned}$$

de modo que  $a = 6,248261206$ , ou,  $6^\circ 15'$ , que equivale a 375 milhas. Assim, a distância que o navio deverá percorrer para resgatar o pescador é de 375 milhas.

**Situação Problema 3.12.** Considere as cidades de Huambo na Angola continente africano e Cruz das Almas, Bahia, Brasil cujas coordenadas são:



Tabela 3.1: Coordenadas geográficas de Huambo e Cruz das Almas

Cidade	Latitude	Longitude
Huambo:	12°46'S	15°44'E
Cruz das Almas:	12°40'S	39°06'W

Suponha agora que as duas cidades estejam na mesma Latitude 12°40'S, conseqüentemente estarão em um mesmo paralelo. A partir dessas informações, encontre a distância entre essas duas cidades. Faça uma conjectura e após fazer os cálculos necessários discuta os resultados.

Para resolver esta situação podemos pensar em dois procedimentos:

**Caso (1):** Como estamos considerando no mesmo paralelo (pois a diferença é pequena), podemos utilizar a fórmula (2.3). Considerando o ponto  $B$  referente a Cruz das Almas e  $C$  referente a Huambo, temos:

Encontrando o ângulo entre os meridianos correspondentes aos pontos  $B$  e  $C$ :  $\theta = 15^\circ 44' + 39^\circ 66' = 55^\circ 50'$ , como  $xy = XY \cdot \cos(\phi)$  (2.3), onde  $xy$  é o arco paralelo correspondente ao arco de Equador  $XY$  e podemos estabelecer a relação:

$$\frac{XY}{2\pi R} = \frac{\theta}{360^\circ}$$

considerando:  $\pi = 3,14$ , onde  $R$  é o raio da Terra  $R = 6.400 \text{ km}$  e  $\theta$  a medida do ângulo correspondente ao arco  $xy$ . Daí obtemos,

$$XY = 111,64\theta$$

substituindo na expressão (2.3), temos:

$$\text{A distância entre } B \text{ e } C \text{ é } BC = xy = 111,64 \cdot (55^\circ 50') \cdot \cos(12^\circ 40') = 6.081,53 \text{ km.}$$

**Caso (2):** Tomemos agora o triângulo esférico (Figura 3.4), onde o ponto  $A$  está situado no pólo sul, e o ponto  $B$  é a localização de Cruz das Almas, enquanto o ponto  $C$  é a localização de Huambo. Logo:

- O lado  $AB = c = 90^\circ - 12^\circ 40' = 77^\circ 20'$ ;

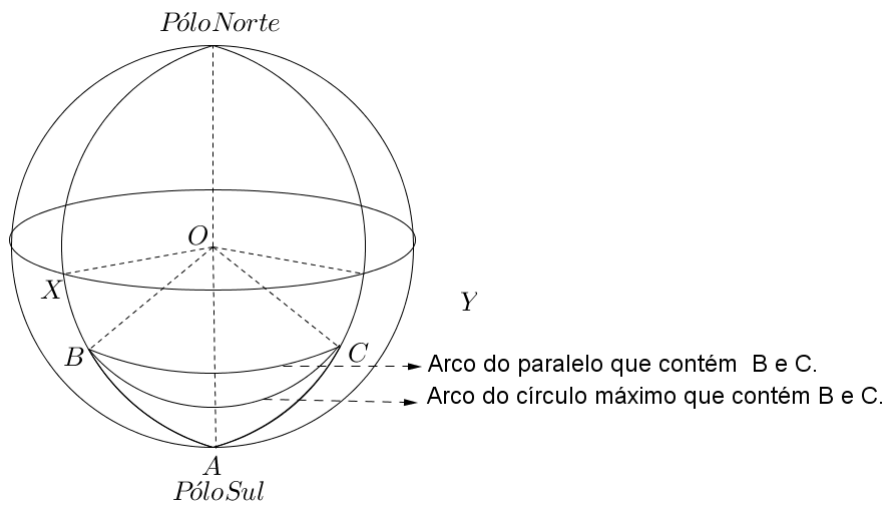


Figura 3.4: Comparando distâncias na superfície esférica.

- O lado  $AC = b = 90^\circ - 12^\circ 40' = 77^\circ 20'$ ;
- O ângulo  $A = 15^\circ 44' + 39^\circ 66' = 55^\circ 50'$ .

Agora, utilizando a fórmula (2.6), obtemos:

$$\begin{aligned}
 \cos(a) &= \cos(b) \cos(c) + \sin(b) \sin(c) \cos(A) \\
 &= \cos(77^\circ 20') \cos(77^\circ 20') + \sin(77^\circ 20') \sin(77^\circ 20') \cos(55^\circ 50') \\
 &= 0,219278624 \cdot 0,219278624 + 0,97566228 \cdot 0,97566228 \cdot 0,561602106 \\
 &= 0,048083114 + 0,534598527 \\
 &= 0,582681643,
 \end{aligned}$$

de modo que  $a = 54,36062298$ , ou seja,  $a = 54^\circ 22'$ , que equivale a 3.262 milhas, ou 6.041,22 km. É possível notar que essa distância é menor do que a encontrada no caso (1) de modo que essa é a distância entre os pontos  $B$  e  $C$ . No caso (2) a trajetória foi pelo círculo máximo que contém os pontos  $B$  e  $C$  (a Geodésica), enquanto no caso (1), foi pelo paralelo que contém os pontos  $B$  e  $C$ . Além disso, podemos observar que essa diferença no percurso poderá ser muito maior em paralelos mais afastado do Equador. Logo, a escolha da trajetória é feita pela segurança (devido o encontro de *icebergs* e tempestades) e economia (pois um navio de porte médio não gasta menos que 2 mil litros de combustível por hora) [12].

## Considerações finais

**E**STE trabalho procurou mostrar o surgimento histórico e filosófico das Geometrias Euclidiana e não-Euclidiana, desde a civilização grega até os nossos dias, além de selecionar algumas atividades da Geometria Esférica, que possam ser realizadas no ensino básico e que atendam às condições de desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes.

A presente proposta visa mostrar aos estudantes e professores do ensino básico que a Matemática não é algo pronto e acabado, ou mesmo, infalível e imutável. Mas, através da quebra de paradigmas, pretende incentivar os docentes e discentes a ampliar os horizontes para novos caminhos na ciência.

No desenvolvimento do conhecimento matemático, a história mostrou grandes transformações matemáticas acessíveis aos estudantes da educação básica. Desta forma evidenciar a abordagem das Geometrias não-Euclidianas para a educação básica significa proporcionar aos estudantes o acesso a outras ideias, com a finalidade de ampliar seu conhecimento e pensamento geométrico.

A título de exemplo, o texto traz um breve relato das discussões acerca do quinto postulado de Euclides que perduraram por séculos. Demonstrando os esforços empregados de vários matemáticos com o intuito de prová-lo. Mesmo sem êxito, tais discussões foram ponto de partida para a criação de para outras Geometrias e possibilitaram uma nova maneira de analisar um mundo não-Euclidiano. Devido a estes fatores, significativas mudanças ocorreram na Geometria, de um modo geral. Este exemplo, evidência que muitas vezes em Matemática (ou até mesmo na vida) o que se aprende com o fracasso é tão (ou até mais) importante que os resultados obtidos nos acertos.

A fim de fixar o entendimento do texto, aplicações foram realizadas com a finalidade de compreender os conceitos da Geometria Esférica fazendo relações desta com a Geometria Euclidiana no plano. Neste sentido os estudantes serão capazes de compará-las e diferenciá-las. Além do fato de que o trabalho envolvendo a manipulação de materiais como o globo, o mapa-

múndi, a folha de papel, a bola de isopor, dentre outros utilizados, facilita o entendimento dos conceitos empregados, aumentando a possibilidade de abstração dos modelos geométricos em questão.

Espera-se que a inserção das abordagens acerca das Geometrias não-Euclidianas não seja imediata. Mas, mediante o interesse do professor tornar-se-á possível a ampliação de tais discussões. Por isso é necessário esforço e dedicação, para gerar uma mudança na postura atual do ensino de Geometria.

Para futuros trabalhos, poderão ser abordados na educação básica, o funcionamento da Matemática do GPS; como calcular a hora local verdadeira (ambos utilizando a Geometria Esférica); detalhar a Geometria Hiperbólica com suas possíveis aplicações; Geometria do Táxi [20]; Geometria Projetiva [21] e Fractais [22]. Além disso, aplicar os conceitos das Geometrias não-Euclidianas através de recursos computacionais. Assim, tem-se muito a explorar neste ramo da Matemática o qual é rico e acessível aos professores e estudantes da educação básica.

Através deste trabalho e de tantos outros elaborados mediante a proposta do PROFMAT anseia-se dos professores ampliar seu conhecimento, de pesquisar, além de propor melhorias para o Ensino e Aprendizado da Matemática.

## Referências Bibliográficas

- [1] DE MAIO, W. *Geometrias: geometrias analítica e vetorial: euclidianas e não-euclidianas*. Rio de Janeiro -RJ: LTC, 2008.
- [2] EVES, H. *Introdução a história da matemática*. Campinas-SP: Editora da Unicamp, 2004.
- [3] BOYER, C. *História da matemática*. São Paulo-SP: 3ª edição, Edgard Blücher/Edusp, 2010.
- [4] TENÓRIO, R. M.; PITOMBO, N. C.; BORGES, C.; DIAS, A. *Aprendendo pelas raízes: alguns caminhos da matemática na história*. Salvador-BA: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1995.
- [5] SANTOS, A. V. *História das ciências: uma abordagem introdutória*. Cachoeira-BA: Edição do Mestrado em Ciências Sociais da UFRB, 2010.
- [6] GARBI, G. G. *A rainha das ciências: um passeio maravilhoso mundo da matemática*. São Paulo-SP: Editora Livraria da Física 5ª edição, 2010.
- [7] HEFEZ, A. *Elementos de aritmética*. Rio de Janeiro-RJ: SBM, 2006.
- [8] ALENCAR FILHO, E. *Teoria elementar dos números*. São Paulo-SP: Nobel, 1981.
- [9] DOMINGUES, H. H. *Fundamentos de aritmética*. São Paulo-SP: Atual, 1991.
- [10] MILIES, C. P.; COELHO, S. P. *Números: uma introdução a matemática*. São Paulo-SP: EDUSP, 2001.
- [11] COUTINHO, S. C. *Números inteiros e criptografia rsa*. Rio de Janeiro-RJ: IMPA, 2011.
- [12] COUTINHO, L. *Convite às geometrias não-euclidianas*. Rio de Janeiro-RJ: Interciência, 2001.
- [13] WOLFE, H. E. *Introduction to non-eclidean geometry*. New York: The Dryden Prees, 1945.

- [14] ROGÉRIO, B. *Geometrias não-euclidianas: Proposta de abordagem aplicável ao ensino básico*. Salvador-BA: UFBA - IM - SBM - PROFMAT, 2013.
- [15] RONAN, C. A. *História ilustrada a ciência da universidade de cambridge*. Rio de Janeiro - RJ: Volume 4. Jorge Zahar Editora, 2001.
- [16] POLYA, G. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro - RJ: Interciência, 1995.
- [17] ALVES, S. *A geometria do globo terrestre*. Rio de Janeiro-RJ: Revista do Programa de Iniciação Científica - OBMEP - IMPA, 2010.
- [18] AYRES JR., F. *Trigonometry of plane and spherical*. New York: Schaum Publishing co, 1954.
- [19] VALDENI, S.; THOMAZ, M. *Geometria não-euclidiana e geometria esférica. O professor pde e os desafios da escola pública paranaense*. Paraná: Secretaria de Educação, 2007.
- [20] KRAUSE, E. F. *Taxicab geometry: An adventure in non-euclidean geometry*. Dover, NY, 1986.
- [21] COXETER, H. S. M. *Projective geometry*. Springer Verlag, 1974.
- [22] BARBOSA, R. M. *Descobrimdo a geometria fractal para a sala de aula*. Belo Horizonte-MG: Autêntica, 2002.