



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA

CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA EM ENERGIA E SUSTENTABILIDADE

BACHARELADO INTERDISCIPLINAR EM ENERGIA E SUSTENTABILIDADE

# **EFEITO DA PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOBRE UMA VELA SOLAR EM TORNO DE MERCÚRIO**

TIAGO SILVA E SILVA

FEIRA DE SANTANA, 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA EM ENERGIA E SUSTENTABILIDADE  
BACHARELADO INTERDISCIPLINAR EM ENERGIA E SUSTENTABILIDADE

# **EFEITO DA PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOBRE UMA VELA SOLAR EM TORNO DE MERCÚRIO**

Trabalho de Conclusão de curso  
apresentado a Universidade Federal do  
Recôncavo da Bahia como parte dos  
requisitos para obtenção do título de  
**Bacharel em Energia e  
Sustentabilidade.**

Orientador (a): Prof.: Dr. Jean Paulo dos  
Santos Carvalho

TIAGO SILVA E SILVA

FEIRA DE SANTANA, 2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA

CENTRO DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA EM ENERGIA E SUSTENTABILIDADE

BACHARELADO INTERDISCIPLINAR EM ENERGIA E SUSTENTABILIDADE

**EFEITO DA PRESSÃO DE RADIAÇÃO SOBRE UMA  
VELA SOLAR EM TORNO DE MERCÚRIO**

Aprovada em: 11 / 12 / 2020

EXAMINADORES:

Prof. Dr. Jean Paulo dos Santos Carvalho, ASS \_

*Jean Paulo dos S. Carvalho*

Prof. Dr. Juliano Pereira Campos, ASS \_\_\_\_

*Juliano Pereira Campos*

Prof. Dr. Jarbas Cordeiro Sampaio ASS

*Jarbas Cordeiro Sampaio*

*Tiago Silva e Silva*

FEIRA DE SANTANA, 2020

*“Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial na minha vida, a minha família e ao meu orientador Prof.: Dr. Jean Paulo.”*

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus por ser essencial na minha vida. Aos meus pais Erivaldo Santos e Silva e Tereza Cristina da Paixão Silva e Silva, meu irmão Amílcar Pinheiro da Silva Neto, minhas tias Simone da Paixão Silva, Consuelo da Paixão Silva e Conceição da Paixão Silva e toda a minha família por todos os esforços e apoio para que eu chegasse até aqui. Agradeço a meu orientador Dr. Jean Paulo dos Santos Carvalho por toda ajuda, compreensão, confiança e por aceitar ser o meu orientador neste trabalho. Agradeço também aos meus colegas, em especial, Rafael Almeida, Dominique Pereira, Luiz Eduardo Amorim, Jackson dos Santos Lima e Roney Mercês que me ajudaram bastante durante essa jornada acadêmica. Agradeço também aos docentes que me acompanharam e me fizeram agregar muito conhecimento, Dr. Anderson Dourado Sisnando e Dr. Rebecca da Silva Andrade. Sem a participação de todos vocês, não seria possível realizar este trabalho.

## RESUMO

Nesta pesquisa, analisamos a dinâmica de satélites artificiais em torno de Mercúrio levando em conta os principais efeitos perturbadores. Consideramos um satélite que utiliza a Vela Solar como mecanismo de propulsão. No potencial perturbador são consideradas as forças devido a distribuição não uniforme de massa de Mercúrio, a perturbação gravitacional devido ao Sol (efeito do terceiro corpo) e a Pressão de Radiação Solar (PRS). A Vela Solar é um tipo de propulsão que utiliza a Pressão de Radiação Solar para gerar aceleração, ganha impulso ao refletir os fótons que irão transferir a sua energia para as velas solares, fazendo com que a nave se movimente. Além de diminuir os custos nos combustíveis para futuras correções de órbita após o seu lançamento, as Velas Solares são sustentáveis porque utilizam a energia solar, uma energia limpa e renovável. É apresentado um conjunto de simulações em busca por órbitas que libram em torno de um ponto de equilíbrio com pequena variação dos elementos orbitais, sendo dois desses elementos, em especial, o argumento do pericentro ( $g$ ) e a excentricidade ( $e$ ), ou seja, órbitas quase congeladas. O potencial perturbador da nave espacial é substituído nas equações planetárias de Lagrange e integrado numericamente utilizando o Software Maple. São feitas simulações utilizando os dados do Mercury Magnetospheric Orbiter (MMO) da missão BepiColombo, satélite lançado no dia 19 de outubro de 2018 e que possui previsão de chegada em Mercúrio no ano de 2021. O objetivo deste trabalho é estudar a estabilidade das órbitas quase circulares, principalmente em termos da manutenção do semieixo maior ( $a$ ), da excentricidade ( $e$ ) e do argumento do pericentro ( $g$ ), fazendo simulações com e sem a Vela Solar dentro de certos limites pré-fixados.

**Palavras chaves:** Órbitas congeladas. Satélite artificial. Sustentabilidade. Vela Solar.

## ABSTRACT

In this research, we analyze the dynamics of artificial satellites around Mercury taking into account the main disturbing effects. We consider a satellite that uses the Solar Sail as a propulsion mechanism. In the disturbing potential are considered the forces due to the non-uniform distribution of Mercury mass, the gravitational disturbance due to the Sun (effect of the third body) and the Solar Radiation Pressure (SRP). The Solar Sail is a type of propulsion that uses the Solar Radiation Pressure to generate acceleration, gains momentum by reflecting the photons that will transfer its energy to the solar sails, making the ship move. In addition to lowering fuel costs for future orbit corrections after their launch, Solar Sails are sustainable because they use solar energy, clean and renewable energy. A set of simulations is presented in search of orbits that release around an equilibrium point with little variation of the orbital elements, two of which are, in particular, the argument of the pericenter ( $g$ ) and the eccentricity ( $e$ ), that is, almost frozen orbits. The spacecraft's disturbing potential is replaced in Lagrange's planetary equations and integrated numerically using Maple Software. Simulations are carried out using data from the Mercury Magnetospheric Orbiter (MMO) of the BepiColombo mission, a satellite launched on October 19, 2018 and expected to arrive at Mercury in 2021. The objective of this work is to study the stability of the orbits almost circular, mainly in terms of the maintenance of the major semi-axis ( $a$ ), the eccentricity ( $e$ ) and the argument of the pericenter ( $g$ ), making simulations with and without the Solar Sail within certain pre-fixed limits.

**Keywords:** Frozen orbits. Artificial satellite. Sustainability. Solar Sail.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Vela Solar.....	18
Figura 2 - Embarcações à Vela.....	19
Figura 3 - Konstantin Tsiolkovsky.....	21
Figura 4 - Fridrickh Tsander .....	21
Figura 5 - Arthur C. Clarke (1917-2008).....	23
Figura 6 - Dimensões da Vela Solar.....	24
Figura 7 - A Vela Solar IKAROS no espaço .....	25
Figura 8 - Mosaico de imagens do Planeta Mercúrio obtidas com a sonda Mariner 10 (NSSDC) .....	26
Figura 9 - Satélite utilizado na missão Mariner 10.....	29
Figura 10 - Satélite utilizado na missão MESSENGER .....	29
Figura 11 - Satélite utilizado na missão BepiColombo .....	30
Figura 12 - Ilustração do comportamento de uma solução genérica devido a cada tipo de termo perturbativo. ....	32
Figura 13 - excentricidade (e) x tempo (t) (a) e excentricidade (e) x argumento do pericentro (g) (b).....	47
Figura 14 - excentricidade (e) x tempo (t) (a) e excentricidade (e) x argumento do pericentro (g) (b).....	48
Figura 15 - Comportamento no tempo da posição do pericentro (r <sub>p</sub> ) x tempo (t)....	49
Figura 16 - Excentricidade (e) x tempo (t) (a) e excentricidade (e) x argumento do pericentro (g) (b), o valor de $\beta = 0,0001$ e o valor de área/massa, utilizando a Eq. (7) ( $A/m = 9,746588694 \times 10^{-6}$ ).....	50
Figura 17 - Comportamento no tempo da posição do pericentro (r <sub>p</sub> ) x tempo (t). $\beta = 0,0001$ e $A/m = 9,746588694 \times 10^{-6}$ . ....	51
Figura 18 - Excentricidade (e) x tempo (t) (a) e excentricidade (e) x argumento do pericentro (g) (b). $\beta = 0,001$ e $A/m = 9,746588694 \times 10^{-5}$ . ....	51
Figura 19 - Comportamento no tempo da posição do pericentro (r <sub>p</sub> ) x tempo (t). $\beta = 0,001$ e $A/m = 9,746588694 \times 10^{-5}$ . ....	52
Figura 20 - Excentricidade (e) x tempo (t). $\beta = 0,01$ e $A/m = 9,746588694 \times 10^{-4}$ . ....	53
Figura 21 - Comportamento no tempo da posição do pericentro (r <sub>p</sub> ) x tempo (t). $\beta = 0,01$ e $A/m = 9,746588694 \times 10^{-4}$ . ....	53

Figura 22 - Excentricidade (e) x tempo (t) (a) e excentricidade (e) x Argumento do Pericentro (g) (b). $\beta = 0,0001$ e $A/m = 9,746588694 \times 10^{-6}$ .	54
Figura 23 - Excentricidade (e) x argumento do pericentro (g).	55
Figura 24 - Excentricidade (e) x argumento do pericentro (g).	56
Figura 25 - Excentricidade (e) x argumento do pericentro (g).	56
Figura 26 - Excentricidade (e) x argumento do pericentro (g).	57
Figura 27 - Excentricidade (e) x argumento do pericentro (g).	58
Figura 28 - Excentricidade (e) x argumento do pericentro (g).	58
Figura 29 - Excentricidade (e) x argumento do pericentro (g).	59
Figura 30 - Excentricidade (e) x argumento do pericentro (g). $\beta = 0,0001$ e $A/m = 9,746588694 \times 10^{-6}$ .	60
Figura 31 - Excentricidade (e) x argumento do pericentro (g). $\beta = 0,0001$ e $A/m = 9,746588694 \times 10^{-6}$ .	61
Figura 32 - Excentricidade (e) x argumento do pericentro (g). $\beta = 0,001$ e $A/m = 9,746588694 \times 10^{-5}$ .	61
Figura 33 - Excentricidade (e) x argumento do pericentro (g). $\beta = 0,0001$ e $A/m = 9,746588694 \times 10^{-6}$ .	62

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 - Parâmetros orbitais de Mercúrio .....	26
Tabela 2 - Coeficientes harmônicos de Mercúrio normalizados .....	37

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DLR – Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (Centro Aeroespacial Alemão)

ESA – European Space Agency

JAXA – Japan Aerospace Exploration Agency

JPL – Jet Propulsion Laboratory

MPO – Mercury Planetary Orbiter

MMO – Mercury Magnetospheric Orbiter

NASA – National Aeronautics and Space Administration

PRS – Pressão de Radiação Solar

PTC – Perturbação do Terceiro Corpo

UA – Unidade Astronômica

$a$  – Semieixo Maior

$a_p$  – Semieixo Maior da Órbita (Elíptica) do Corpo Secundário

$C_n$  – Harmônico Esférico Setorial

$C_{22}$  – Elipticidade equatorial de Mercúrio

$c$  – Velocidade da luz no vácuo

$e$  – Excentricidade

$e_M$  – Excentricidade da Órbita do Sol

$g$  – Argumento do Pericentro

$g_M$  – Argumento do Pericentro de Mercúrio

$h$  – Longitude do Nodo Ascendente

$h_M$  – Longitude do Nodo Ascendente de Mercúrio

$i$  – Inclinação Angular

$i_M$  – Inclinação de Mercúrio em torno do Sol

$I$  – Fluxo Solar

$I_0$  – Constante Solar a 1 UA

$J_n$  – Coeficiente Harmônico Esférico Zonal

$J_2$  – Achatamento nos Polos de Mercúrio

$J_3$  – Achatamento em Forma de Pêra

$J_4$  – Variação do  $J_3$

$J_5$  – Variação do  $J_3$

$J_6$  – Variação do  $J_3$

$L_{\odot}$  – Luminosidade do Sol

$m$  – Massa do Corpo Central

$n$  – Movimento médio do satélite em torno de Mercúrio

$n_M$  – Movimento Médio de Mercúrio em torno do Sol

$m_p$  – Massa do corpo secundário

$P$  – Período Orbital em Dias

$R_2$  – Perturbação do Terceiro Corpo

$R_M$  – Raio equatorial de Mercúrio

$r_{\odot}$  – Posição do vetor do sol em relação a Mercúrio

$t$  – Tempo

$\beta$  – Parâmetro Adimensional

$\mu$  – Parâmetro Gravitacional de Mercúrio

$\mu_{\odot}$  – Parâmetro Gravitacional do Sol

$\rho$  – Distância Média de Mercúrio até o Sol

$\sigma$  – Parâmetro de carregamento da vela (densidade da área)

$\sigma^*$  – Parâmetro de carregamento crítico

## Sumário

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>14</b>
<b>2. REFERENCIAL TEÓRICO .....</b>	<b>18</b>
2.1. Vela solar .....	18
2.1.1. Contexto histórico .....	20
2.1.2. Configuração e aplicações da vela solar .....	23
2.2. Mercúrio .....	25
2.2.1. Órbitas congeladas .....	27
2.2.2. Missões realizadas em Mercúrio .....	28
2.2.2.1. Mariner 10 .....	28
2.2.2.2. Messenger .....	29
2.2.2.3. BepiColombo .....	30
2.3. Pressão de Radiação Solar (PRS) .....	31
2.4. Equações fundamentais .....	33
2.5. Software Maple .....	45
<b>3. METODOLOGIA.....</b>	<b>46</b>
<b>4. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....</b>	<b>47</b>
4.1. Aplicações em órbitas de alta altitude.....	47
4.2. Aplicações em órbitas de baixa altitude.....	55
<b>5. CONCLUSÕES .....</b>	<b>63</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>65</b>

## 1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho foi elaborado após a participação do projeto de iniciação científica sobre: “Dinâmica de satélites artificiais em torno de um planeta” com a orientação do Doutor Jean Paulo dos Santos Carvalho. Nesta pesquisa, são analisadas órbitas com a menor variação dos seus elementos orbitais, denominadas de órbitas quase congeladas (ver, por exemplo, CARVALHO et al., 2010), para um veículo espacial em torno de Mercúrio levando em conta, no potencial perturbador, as forças devido a distribuição não uniforme de massa de Mercúrio, a perturbação gravitacional devido ao Sol (efeito do terceiro corpo) e a Pressão de Radiação Solar Direta (PRS). Também é feita uma análise histórica sobre a vela solar e suas aplicações.

Em Tresaco et al. (2016), as órbitas são consideradas congeladas quando seus elementos orbitais são constantes em média. Assim, em uma dada latitude, o satélite sempre passa na mesma altitude. Isso é muito interessante para missões espaciais que exigem inspeção cuidadosa de qualquer corpo celeste. Essas órbitas com excentricidade média e argumento do pericentro constantes podem ser obtidas como os equilíbrios do sistema dinâmico. Órbitas congeladas são muito interessantes para missões científicas, porque o controle da excentricidade orbital leva ao controle do tempo de vida da espaçonave. O design de órbitas congeladas envolve a seleção dos valores corretos de excentricidade e argumento do pericentro, para um dado semieixo maior e inclinação orbital. A derivação de órbitas congeladas, levando em consideração outras forças de perturbação, como o potencial gravitacional, o terceiro corpo e a pressão de radiação solar, é de grande vantagem nas estratégias de manutenção de estações.

O uso de sistemas que possuem a radiação solar como propulsão, caso das velas solares, atrai o interesse da comunidade acadêmica visando as missões científicas. As velas solares oferecem novas missões espaciais desafiadoras. Elas permitem obter longos tempos de permanência em órbita e também viabilizam novas missões de observação baseadas no cálculo de órbitas geocêntricas congeladas síncronas ao sol. No entanto, o efeito da pressão de radiação solar representa uma força adicional na vela solar que pode afetar muito o seu comportamento orbital a

longo prazo. Assim, a PRS deve ser incluída como força de perturbação no modelo dinâmico para maior precisão (KHATTAB et al., 2020).

A pesquisa e curiosidade sobre o espaço exterior sempre constantes na humanidade, à procura de outros planetas, formas, civilizações onde a exploração do espaço é o que desperta o desejo do ser humano. O desafio por vários anos foi a obtenção de energia suficiente para se utilizar nas missões. De tal modo, atualmente, o principal objetivo das missões é oferecer mais autonomia para os artefatos espaciais e, conseqüentemente, diminuir o custo das missões. As velas solares têm sido encaradas como uma tecnologia que permite essa possibilidade, porque são promissoras para a exploração espacial, pois elas usam para a propulsão, um recurso abundante no espaço: a radiação solar (CUBILLOS, 2012).

Em Carvalho (2017) é comentado que a vela solar é um tipo de propulsão que utiliza a Pressão de Radiação Solar para gerar aceleração, ganha impulso ao refletir os fótons. Em teoria, esses fótons irão transferir a sua energia para as velas solares, fazendo com que a nave se movimente. O conceito de vela solar e a física em que se baseia podem ser encontrados desde o século XVII. Em 1619, Johannes Kepler propôs que as caudas de cometas fossem empurradas para fora do Sol devido à pressão da luz solar. Naquela época, a teoria corpuscular da luz era a visão preferida da óptica e a pressão externa devido à luz solar era uma consequência natural dessa teoria.

No início do século XX uma vela solar articulada foi objeto de estudo de alguns autores, embora à época o interesse em tal estrutura fosse puramente acadêmico, dada à impossibilidade de construí-las. Com as inovações da Engenharia de Materiais, materiais leves e resistentes foram criados, deixando a construção das velas mais próximas da realidade (CUBILLOS, 2012). Durante a segunda metade do século XX e o século XXI, uma quantidade significativa de trabalhos teóricos e práticos foram realizados, considerando a astrodinâmica, as aplicações das missões e os requisitos tecnológicos da vela solar (MACDONALD E MCINNES, 2010).

As velas solares, que impulsionam as sondas usando a força dos fótons que incidem sobre uma finíssima película de material reflexivo, são vistas como promissoras pela comunidade científica, pois, em teoria, permitiriam que sondas viajem além do sistema solar, aproveitando unicamente a luz do Sol e das estrelas. Em McInnes (1999), a fonte de força motriz para as espaçonaves a vela solar é o

momento transportado para a vela por energia radiativa do Sol. Embora a observação de que a luz possa empurrar a matéria seja totalmente contrária à experiência cotidiana, é um mecanismo comum no sistema solar.

Em Khattab et al. (2020), as velas solares são aplicáveis a muitas missões espaciais espalhadas por todo o sistema solar. As velas solares podem atingir 0,25 Unidade Astronômica (UA) ou até mais perto do Sol para oferecer cargas de observação solar. Essas naves espaciais poderiam viajar entre os planetas interna e externamente. Também podem ser colocadas em um ponto estacionário em relação à Terra ou ao Sol para, por exemplo, alertar sobre tempestades solares. As órbitas dos satélites da Terra podem ser modificadas pela navegação solar.

Agora, falando sobre a Pressão de Radiação Solar, o fundamento teórico correto para a existência de pressão de radiação veio independentemente das teorias astronômicas. O físico escocês James Clerk Maxwell previu a existência de pressão de radiação em 1873 como consequência de sua teoria unificada da radiação eletromagnética. Aparentemente, independente de Maxwell, Bartoli, em 1876, demonstrou a existência de pressão de radiação como consequência da segunda lei da termodinâmica. Também em 1873, Crookes erroneamente acreditava que ele havia demonstrado a existência de pressão de radiação usando sua pressão de radiação recém-criada. As forças exercidas no radiômetro, que são de fato devidas ao espalhamento molecular, são ordens de magnitude maiores que as forças de pressão de radiação. A verdadeira verificação experimental da existência de pressão de radiação e a verificação dos resultados quantitativos de Maxwell foram feitas em 1900. Na Universidade de Moscou, Peter Lebedew finalmente conseguiu isolar a pressão de radiação usando uma série de elegantes experimentos de balanço de torção. Verificação independente também foi obtida em 1901 por Nichols e Hull em Dartmouth College, New Hampshire (MCINNES, 1999).

O efeito da Pressão de Radiação Solar aumenta bastante, às vezes na medida em que a pressão da luz pode exceder a gravidade solar, ejetando poeira para o espaço interestelar. Como é apropriado, então, que o mesmo mecanismo que varre as caudas de cometas e acelere o material interplanetário para as estrelas também possa ser utilizado para impulsionar a espaçonave através do sistema solar.

O objetivo desse trabalho é encontrar e analisar órbitas quase congeladas em torno de Mercúrio, principalmente em termos da manutenção da excentricidade,

inclinação e do argumento do pericentro, dentro de certos limites pré-fixados. Para isto, a vela solar será considerada levando em conta a não esfericidade de Mercúrio ( $J_2$ - $J_6$ ,  $C_{22}$ ), a perturbação gravitacional do terceiro corpo (Sol) e a Pressão de Radiação Solar direta.

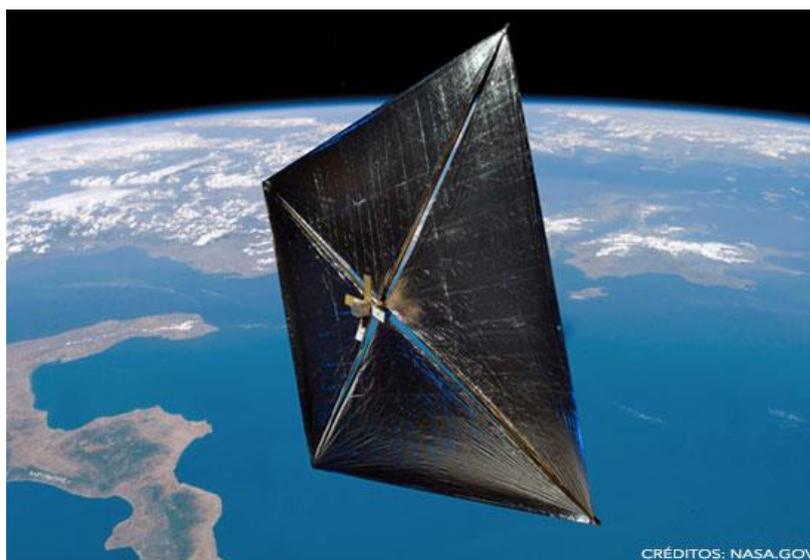
Falando a respeito de Mercúrio, ocorreram três missões importantes para determinar várias características do planeta. A primeira missão (Mariner 10), de acordo com a NASA, foi o sétimo lançamento bem-sucedido da série Mariner e a primeira sonda a visitar Mercúrio. A segunda missão (Mercury Surface, Space Environment, Geoquímica e Ranging (MESSENGER)), de acordo com a NASA, foi projetada para estudar as características e o ambiente do planeta Mercúrio. A terceira missão (BepiColombo), de acordo com a NASA, é uma missão da Agência Espacial Europeia (ESA) para orbitar Mercúrio.

No próximo capítulo será descrito o referencial teórico, destacando a vela solar, seu contexto histórico, aplicações, o planeta Mercúrio, as órbitas congeladas e as missões realizadas em Mercúrio.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1. Vela solar

Por toda sua história, a propulsão prática de naves espaciais foi dominada pelos princípios inalteráveis da terceira lei de Newton. Todas as formas de propulsão, desde simples motores de foguete sólidos a complexos acionamentos de íons solar-elétricos, dependem de uma reação que é acelerada em um jato de alta velocidade por alguns meios exotérmicos ou eletromagnéticos. Uma forma única de propulsão que transcende essa dependência da massa de reação é a vela solar. Uma vela solar é uma grande membrana brilhante de película reflexiva mantida em tensão por uma estrutura fina. Usando o impulso obtido apenas ao refletir a luz ambiente do Sol, a vela solar é lenta, mas continuamente acelerada para realizar qualquer número de missões possíveis. Sem a intensa propulsão da reação, a vela solar (Figura 1) aproveita uma pequena fração da energia liberada pela fusão nuclear no núcleo do Sol (MCINNES, 1999).



Fonte: <https://www.sitedecuriosidades.com/im/g/4E79A.jpg>.

Figura 1 - Vela Solar

As missões espaciais usando velas solares permitem, além de uma maior autonomia, uma forma de exploração espacial de baixo custo, uma vez que estes veículos usam apenas a radiação solar, recurso abundante no universo, como fonte de energia principal para se movimentarem (CUBILLOS, 2012). Como as velas solares não são limitadas por uma massa de reação finita, elas podem fornecer aceleração contínua, limitada apenas pela vida útil do filme fino de vela no ambiente espacial. Obviamente, as velas solares também devem obedecer à terceira lei de Newton. No entanto, as velas solares ganham impulso a partir de uma fonte ambiental, ou seja, fótons, os pacotes quânticos de energia, da qual a luz solar é composta. O Sol emite fótons em todas as direções e a vela sofre Pressão de Radiação Solar, o que gera uma força resultante que impulsiona a vela na direção da sua resultante. Assim, um veículo espacial com uma vela é acelerado pela força resultante.

Em Cubillos (2012) o princípio de funcionamento da vela solar é inspirado nas embarcações com velas tradicionais na Terra (Figura 2). Estas últimas navegam utilizando o vento: a vela é submetida à simples pressão do vento, o que impele a embarcação para frente. No espaço, a vela solar utiliza a mesma ideia.



Fonte: Cubillos (2012).

Figura 2 - Embarcações à Vela

Em Cubillos (2012), apesar da vela solar ter sido considerada como um meio prático de propulsão de naves espaciais, só há relativamente pouco tempo, as ideias fundamentais são obtidas (ver MCINNES, 1999). Tal tecnologia de propulsão, nos leva a tornarem possíveis novas missões espaciais, tais como a exploração do sistema solar e observação do espaço sideral (SIMO and MCINNES, 2010). A vantagem é óbvia: as velas solares não precisam carregar um sistema de propulsão principal ativo nem qualquer propulsor, uma vez que a maior limitação para o projeto deste tipo de missões é a quantidade de combustível embarcada, que além de representar peso e volume no lançamento é um recurso esgotável (LEIPOLD, 1999).

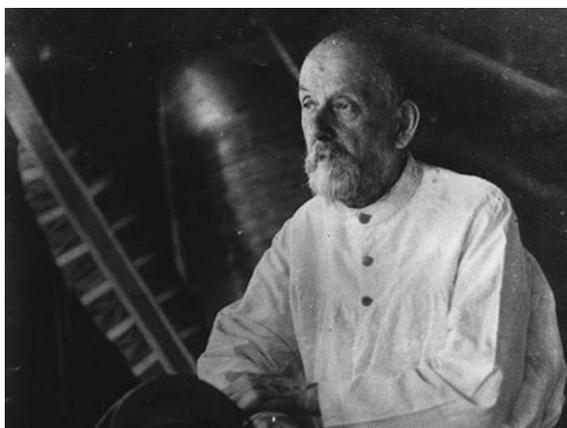
### **2.1.1. Contexto histórico**

Em McInnes (1999), embora a navegação solar tenha sido considerada um meio prático de propulsão de naves espaciais apenas relativamente, recentemente, as ideias fundamentais não são de modo algum novas. O conceito atual de navegação solar tem uma história longa e rica, que remonta aos pioneiros soviéticos da astronáutica e, de fato, antes. O conceito de vela solar foi inicialmente imaginado na ficção científica em 1865 por Jules Verne (CUBILLOS, 2012).

Embora a existência de pressão leve tenha sido demonstrada em teoria pelo físico escocês James Clerk Maxwell em 1873, ela não foi medida experimentalmente até que testes de laboratório de precisão foram realizados pelo físico russo Peter Lebedew em 1900. Da mesma forma, enquanto vários autores de ficção científica, mais notavelmente os autores franceses Faure e Graffigny, em 1889, escreveram sobre naves espaciais impulsionadas por espelhos; foi apenas no início deste século que a ideia de uma vela solar prática foi articulada. Já na década de 1920, o pai soviético da astronáutica, Konstantin Tsiolkovsky, e seu colega de trabalho, Fridrich Tsander, escreveram sobre 'o uso de espelhos trêmulos de folhas muito finas' e 'o uso da pressão da luz solar para atingir velocidades cósmicas'.

Tsiolkovsky (1857-1935) nasceu perto de Moscou, ficou profundamente surdo após uma doença na infância e foi autodidata. Ele era um verdadeiro visionário que inspirou muitos cientistas e engenheiros que mais tarde desenvolveriam foguetes e voos espaciais práticos na União Soviética. Tsilkovsky (Figura 3) também fez

contribuições notáveis à aviação, construindo o primeiro túnel de vento na União Soviética em 1890 e projetando uma aeronave monoplane de metal já em 1894.



Fonte:

[https://www.nasa.gov/sites/default/files/styles/946xvariable\\_height/public/images/481911main\\_rp\\_Tsiolkovsky\\_full.jpg?itok=EKst9ez7](https://www.nasa.gov/sites/default/files/styles/946xvariable_height/public/images/481911main_rp_Tsiolkovsky_full.jpg?itok=EKst9ez7).

Figura 3 - Konstantin Tsiolkovsky

Tsander (1887-1933), foi um engenheiro letão nascido em Riga. Além da navegação solar, Tsander (Figura 4) também é lembrado como um pioneiro da propulsão de foguetes líquidos antes da Primeira Guerra Mundial. De fato, ele conduziu experimentos iniciais com prolusão de líquidos na União Soviética, embora tenha morrido de febre tifóide em março de 1933, pouco antes do voo do primeiro foguete soviético a combustível líquido (MCINNES, 1999).



Fonte: [https://media.sciencephoto.com/image/h4200180/800wm/H4200180-Fridrikh\\_Tsander,\\_Russian\\_scientist.jpg](https://media.sciencephoto.com/image/h4200180/800wm/H4200180-Fridrikh_Tsander,_Russian_scientist.jpg).

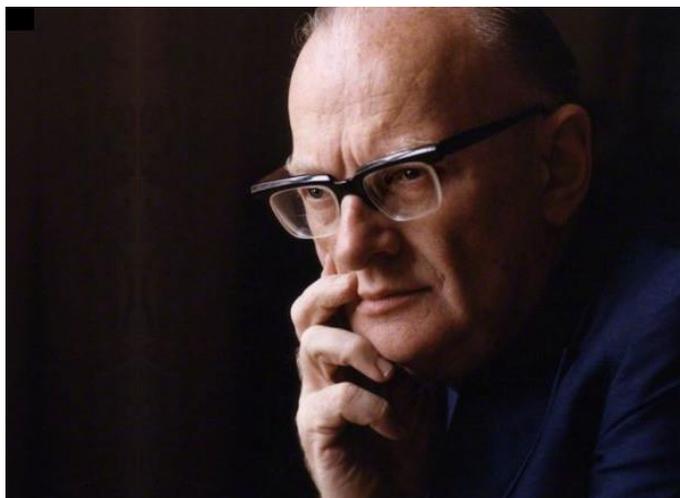
Figura 4 - Fridrickh Tsander

Embora exista alguma incerteza quanto às datas, parece que Tsander foi o primeiro a escrever sobre navegação solar prática em algum momento no verão de 1924. Suas ideias parecem ter sido inspiradas em parte pelos escritos mais gerais de Tsiolkovsky de 1921 sobre propulsão usando luz. Após os escritos iniciais de Tsiolkovsky e Tsander, na década de 1920, o conceito de navegação solar parece ter permanecido essencialmente inativo por mais de trinta anos. Na década de 1950 que o conceito foi reinventado e publicado na literatura. O primeiro autor americano a propor a utilização da vela solar foi o engenheiro aeronáutico Carl Wiley sob o pseudônimo de Russell Sanders. Em seu artigo de maio de 1951 na *Astounding Science Fiction*, Wiley discutiu o design de uma vela solar viável e estratégias para o aumento da órbita em alguns detalhes técnicos. Em particular, ele observou que as velas solares poderiam ser 'amarradas', permitindo uma espiral interna em direção ao Sol. Mesmo em 1951, Wiley estava otimista sobre os benefícios da navegação solar para viagens interplanetárias e a via como mais prática do que a propulsão de foguetes. O conceito moderno de vela solar foi reinventado mais tarde por Richard Garwin, 1958 (CUBILLOS, 2012).

Em McInnes (1999), é comentado que Garwin foi o autor do primeiro artigo sobre vela solar em uma publicação técnica ocidental, a revista *Jet Propulsion*, e cunhou o termo "vela solar". Como Wiley, Garwin reconheceu as características únicas e elegantes da navegação solar; ou seja, que a vela solar não requer propulsor e é acelerada continuamente, permitindo grandes mudanças de velocidade por um longo período de tempo.

Após a discussão da navegação solar por Garwin, estudos mais detalhados da órbita das velas solares foram realizados durante o final da década de 1950 e o início da década de 1960. Vários autores conseguiram mostrar que, para uma orientação fixa da vela, as órbitas da vela solar são da forma de espirais logarítmicas. Comparações simples de navegação solar com sistemas de propulsão química e de íons mostraram que as velas solares poderiam combinar e, em muitos casos, superar esses sistemas para uma variedade de aplicações de missão. Embora esses estudos iniciais explorassem os problemas e benefícios fundamentais da navegação solar, eles careciam de uma missão específica para conduzir análises detalhadas e agir como um foco para utilização futura. É útil notar que, em 1963, Arthur C. Clarke (Figura 5) publicou pela primeira vez seu conhecido conto "O vento do sol". A história,

centrada em uma corrida de vela solar tripulada na órbita da Terra, popularizou a vela solar e, de fato, levou à disseminação da ideia de vela solar a muitos engenheiros de leitura de ficção científica.



Fonte: [https://www.celestis.com/media/5061/arthur\\_clarke\\_4a.jpg](https://www.celestis.com/media/5061/arthur_clarke_4a.jpg).

Figura 5 - Arthur C. Clarke (1917-2008)

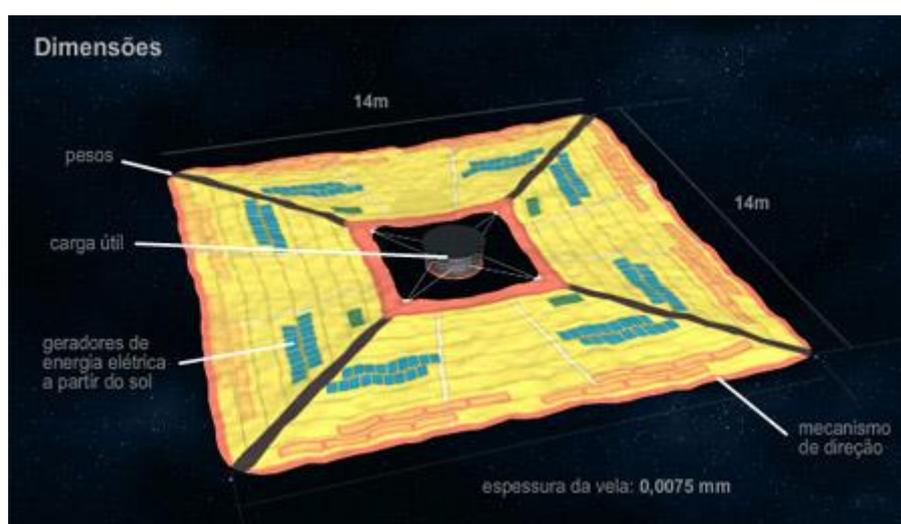
### **2.1.2. Configuração e aplicações da vela solar**

Em Cubillos (2012), a autora comenta que há enormes dificuldades na construção de uma vela solar, principalmente no projeto das hastes que suportam as membranas (ver também GARNER et al., 1999). Uma vez que uma vela solar deve ser bastante leve para mais facilmente atingir grandes velocidades é de extrema necessidade que a vela solar tenha uma grande área de contato com a Pressão de Radiação Solar. Igualmente, as hastes de apoio da estrutura devem ser de material leve, mas resistente, de forma a suportarem os esforços transmitidos pelas películas refletoras.

Diversos materiais têm sido testados para a construção das velas solares. As hastes têm sido construídas com fibra de carbono no DLR (Centro Aeroespacial Alemão), enquanto no JPL (Jet Propulsion Laboratory) estão sendo testadas estruturas de aço inoxidável cobertas com alumínio. Outro material considerado é a fibra de vidro.

Além das dificuldades para se construir uma vela leve e resistente, outra questão a ser considerada é a forma de lançamento. No momento do lançamento, as hastes e as películas devem estar recolhidas, de forma a caberem no lançador, e só quando em órbita devem ser desdobradas. A Figura 6 mostra as dimensões de uma vela solar.

As dimensões de uma vela solar estão especificadas na Figura 6.

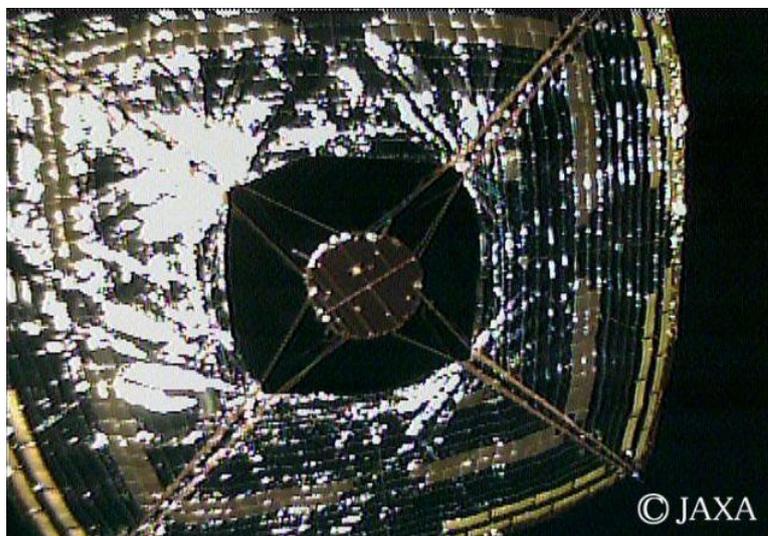


Fonte: <http://glo.bo/1RqzfSh>.

Figura 6 - Dimensões da Vela Solar

Em Gong e McInnes (2019) é relatado que a Agência de Exploração Aeroespacial do Japão (JAXA) lançou a primeira espaçonave interplanetária de vela solar do mundo chamada "Embarcação de pipa interplanetária acelerada pela radiação do Sol" (abreviada como "IKAROS") em maio de 2010. A missão IKAROS demonstrou quatro tecnologias principais. Que são: implantação e controle de uma membrana de vela solar grande e fina, células solares de filme fino integradas à vela para alimentar a carga útil, medição da aceleração devido a Pressão de Radiação Solar na vela solar e controle de atitude variando a refletância de oitenta painéis de cristal líquido embutidos na vela. É considerado um marco na tecnologia de velas solares. A fase mais crítica foi a fase pós-operacional, o que levou ao desenvolvimento de uma vela sucessora, incluindo uma técnica de orientação à navegação (CUBILLOS, 2012). Após o fracasso do Cosmos 1 (2005), a Sociedade Planetária

continuou a desenvolver a tecnologia de vela solar e obteve sucesso com a vela solar IKAROS (Figura 7).



Fonte: <http://www.astropt.org/2010/06/18/uma-vela-no-espaco/>.

Figura 7 - A Vela Solar IKAROS no espaço

A tecnologia de vela solar depende de várias tecnologias importantes de subsistema, incluindo dinâmica e controle de órbita e atitude, estratégia de implantação, tecnologia de materiais. Muitos trabalhos teóricos foram conduzidos para dinâmica e controle de órbita e atitude, no entanto, o diferencial da missão IKAROS, além de demonstrar o controle de atitude usando dispositivos de controle de refletividade, vários experimentos foram conduzidos para demonstrá-la no solo e no espaço.

## 2.2. Mercúrio

Mercúrio é o planeta mais próximo do Sol. Seu nome latino corresponde ao do deus grego Hermes, filho de Zeus. Bastante pequeno, é o menor entre todos os planetas. Sua superfície está coberta por crateras resultantes do impacto de corpos menores (Figura 8). Das inúmeras crateras existentes, destaca-se a Bacia Caloris, com 1.300 quilômetros de diâmetro, quase 1/3 do diâmetro do planeta (RODRIGUES, 2003).



Fonte: Rodrigues (2003)

Figura 8 - Mosaico de imagens do Planeta Mercúrio obtidas com a sonda Mariner 10 (NSSDC)

Em Rodrigues (2003), o autor comenta que Mercúrio possui uma atmosfera muito tênue, quase desprezível, por isso existe uma incrível variação da temperatura entre o dia e a noite: de  $-170^{\circ}$  (lado oculto do Sol) a  $+430^{\circ}$  centígrados (lado iluminado pelo Sol). Comparando com a Terra, onde a variação é de poucas dezenas de graus. Destacando que a órbita de Mercúrio em torno do Sol é altamente excêntrica.

Tabela 1 - Parâmetros orbitais de Mercúrio	
Semieixo maior (a)	$57,91 \times 10^6$ km (0,387098 UA)
Pericentro	$4,6 \times 10^7$ km (0,307499 UA)
Apocentro	$6,982 \times 10^7$ km (0,466 697 UA)
<b>Excentricidade (e)</b>	<b>0,2056</b>
Período orbital (P)	88,0 dias (0,240 anos)
Massa (m)	$0,330 \times 10^{24}$ kg
<b>Inclinação com a eclíptica (i)</b>	<b><math>7,0^{\circ}</math></b>
<b>Inclinação com o equador</b>	<b><math>0.034^{\circ}</math></b>
<b>Argumento do pericentro (g)</b>	<b><math>29,124^{\circ}</math></b>
<b>Longitude do nodo ascendente (h)</b>	<b><math>48,33167^{\circ}</math></b>
Período de rotação	58,65 dias (1407,6 horas)

Fonte: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/mercuryfact.html>.

Na tabela 1 são exibidas as características orbitais de Mercúrio com destaque para a excentricidade, argumento do pericentro, longitude do nodo ascendente e inclinação.

### 2.2.1. Órbitas congeladas

Em Khattab et al. (2020) é comentado que a história da pesquisa em órbitas congeladas começou há vários anos, conforme detalhado em um estudo de Coffey et al. (1994), em que muitos pesquisadores introduziram contribuições úteis. Rosborough e Ocampo (1991) utilizaram as equações planetárias de Lagrange para derivar órbitas congeladas da Terra usando o modo de gravidade. Em Lara et al. (1995) os autores usaram o componente polar do momento angular para delinear numericamente famílias de órbitas congeladas da Terra. A mesma técnica foi aplicada para órbitas lunares congeladas por Elipe e Lara (2003). Aorpimai e Palmer (2003) usaram a descrição do epiciclo para calcular as órbitas congeladas da Terra até harmônicos zonais arbitrários. Zhigang et al. (2014) determinaram as condições iniciais que minimizam a variação do plano orbital para órbitas quase circulares com um semieixo principal de 3 a 10 vezes o raio da Terra. Santos et al. (2013) procuraram órbitas congeladas através de algumas missões em torno de satélites planetários, como as luas de Júpiter, Europa e estudaram sua estabilidade. Masoud et al. (2018, 2019) discutiram seis estratégias de controle para construir órbitas congeladas artificiais e órbitas síncronas ao sol ao redor da Terra. Em Carvalho et al. (2010) é desenvolvido um estudo de órbitas congeladas para um satélite artificial em torno da Lua.

Em Tresaco et al. (2016), para Mercúrio, o projeto de órbitas congeladas envolve a seleção dos valores corretos de excentricidade e argumento do pericentro, para um dado semieixo maior e inclinação orbital. Geralmente, a geração de órbitas congeladas é responsável apenas pelos harmônicos zonais  $J_2$  e  $J_3$ . Quando outras perturbações são consideradas, o efeito perturbador é claramente visível na evolução do vetor de excentricidade e requer correções numéricas iterativamente baseadas no modelo de perturbações completas. Portanto, a derivação de órbitas congeladas, levando em consideração outras forças de perturbação, como o potencial gravitacional, a Perturbação do Terceiro Corpo e a Pressão de Radiação Solar, é de grande vantagem nas estratégias de manutenção de estações.

Em geral, para órbitas em torno de Mercúrio, é necessário considerar a atração gravitacional do terceiro corpo, a não esfericidade do planeta e a Pressão de Radiação Solar devido à sua proximidade. A interação solar, bem como os efeitos perturbadores da Pressão de Radiação Solar, podem desempenhar um papel importante, no caso de uma sonda com uma alta relação área-massa ( $A/m$ ). Além disso, considerar a excentricidade orbital e a inclinação do terceiro corpo adiciona complexidade matemática ao problema. Para este modelo bastante complexo, é possível encontrar condições iniciais para órbitas congeladas (TRESACO et al., 2016).

## **2.2.2. Missões realizadas em Mercúrio**

Três missões espaciais importantes que foram realizadas em Mercúrio com o objetivo de descobrir características orbitais e físicas sobre o planeta e sobre a origem do sistema solar são apresentadas.

### **2.2.2.1. Mariner 10**

A primeira missão a visitar Mercúrio foi a sonda Mariner 10 (Figura 9), de acordo com a NASA, foi o sétimo lançamento bem-sucedido da série. Foi também a primeira espaçonave a usar a atração gravitacional de um planeta (Vênus) para alcançar outro (Mercúrio), e a primeira missão espacial a visitar dois planetas. A espaçonave voou por Mercúrio três vezes em órbita heliocêntrica retrógrada e retornou imagens e dados sobre o planeta. Mariner 10 retornou as primeiras imagens de Vênus e Mercúrio. Os principais objetivos científicos da missão foram medir o ambiente de Mercúrio, a atmosfera, a superfície e fazer investigações semelhantes de Vênus. Os objetivos secundários eram realizar experimentos no meio interplanetário e obter experiência com uma missão de assistência à gravidade de dois planetas.

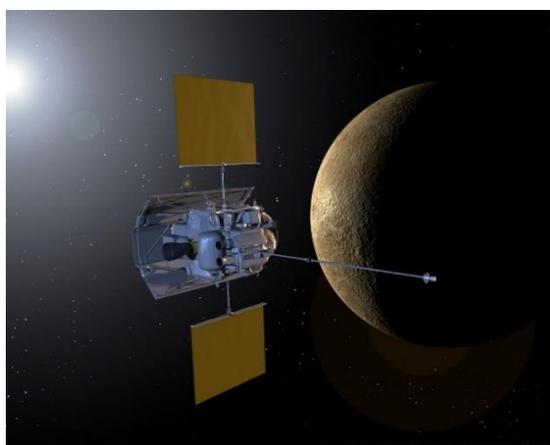


Fonte: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/image/spacecraft/mariner10.gif>

Figura 9 - Satélite utilizado na missão Mariner 10

#### 2.2.2.2. Messenger

A segunda missão (Mercury Surface, Space Environment, Geoquímica e Ranging “MESSENGER”), de acordo com a NASA, foi projetada para estudar as características e o ambiente de Mercúrio em órbita. Especificamente, os objetivos científicos da missão são caracterizar a composição química da superfície de Mercúrio, a história geológica, a natureza do campo magnético, o tamanho e o estado do núcleo, o inventário volátil nos polos e a natureza da exosfera de Mercúrio e magnetosfera sobre uma missão orbital nominal de um ano terrestre. Na Figura 10 é mostrado o satélite em órbita.

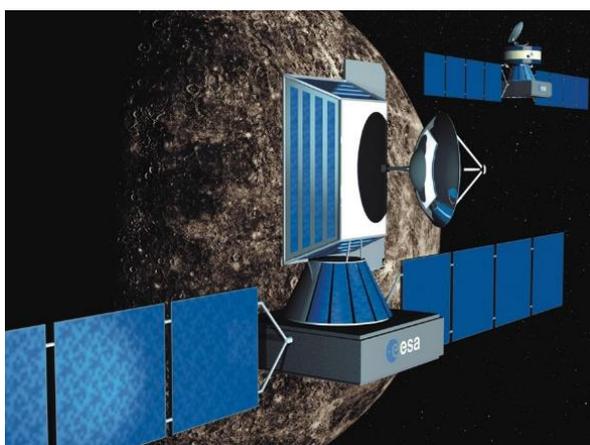


Fonte: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/image/spacecraft/messenger.jpg>

Figura 10 - Satélite utilizado na missão MESSENGER

### 2.2.2.3. BepiColombo

A terceira missão, BepiColombo (Figura 11), de acordo com a NASA, é uma missão da Agência Espacial Europeia (ESA) para Mercúrio. Devido a restrições orçamentárias, a porção de aterrissagem (The Mercury Surface Element, ou MSE) da missão foi cancelada. A missão envolve dois componentes: o Mercury Planetary Orbiter (MPO) e o Mercury Magnetospheric Orbiter (MMO, agora chamado Mio), como mostrado na Figura 11. Os dois componentes foram lançados juntos em um Ariane 5 de Kourou, Guiana Francesa em 01:45:28 UT em 19 de outubro de 2018. A espaçonave terá um cruzeiro interplanetário de quase 7 anos para Mercúrio usando propulsão solar-elétrica e assistências de gravidade, começando com um sobrevoo da Terra em 6 de abril de 2020 e passando por Vênus duas vezes (12 de outubro de 2020, 11 de agosto de 2021) e Mercúrio seis vezes (2 de outubro de 2021, 23 de junho de 2022, 20 de junho de 2023, 5 de setembro de 2024, 2 de dezembro de 2024, 9 de janeiro de 2025). Na chegada a Mercúrio, em 5 de dezembro de 2025, a espaçonave será capturada em órbita polar, que será reduzida usando propulsores químicos. O MPO e o MMO serão então separados em suas próprias órbitas, 400 x 1500 km, período de 2,3 h para MPO, 400 x 12000 km, 9,2 h para MMO. A missão nominal durará um ano terrestre com uma extensão possível de um ano.



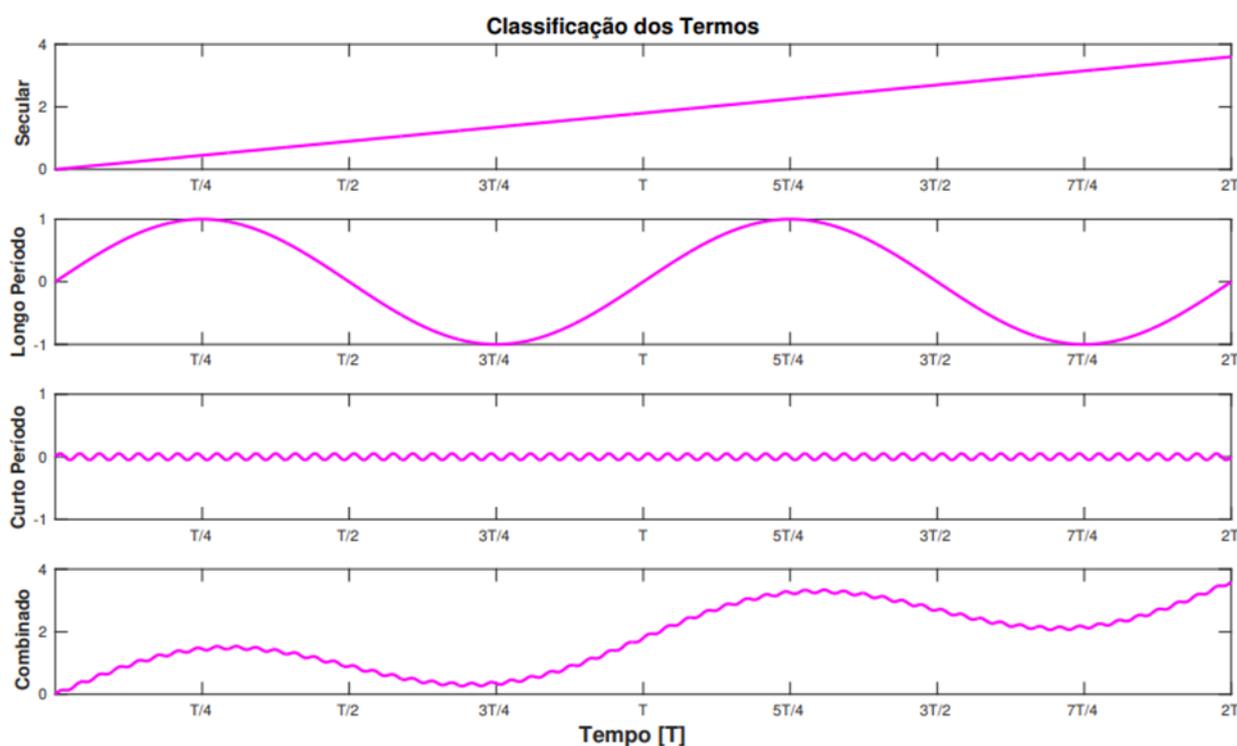
Fonte: [https://nssdc.gsfc.nasa.gov/image/spacecraft/bepi\\_colombo.jpg](https://nssdc.gsfc.nasa.gov/image/spacecraft/bepi_colombo.jpg)

Figura 11 - Satélite utilizado na missão BepiColombo

### 2.3. Pressão de Radiação Solar (PRS)

Segundo Deienno et al. (2016), no início dos anos 60, muita atenção começou a ser dedicada aos efeitos da Pressão de Radiação Solar atuando em satélites em órbita ao redor da Terra, com grandes proporções de área para massa. Ainda no início dos anos 60, Musen et al. (1960) observaram que as observações e os cálculos da altura do pericentro do satélite Vanguard I não concordavam, considerando apenas os efeitos do terceiro harmônico e as perturbações gravitacionais lunares e solares. Assim, eles incluíram os efeitos da Pressão de Radiação Solar e encontraram uma estreita concordância entre os dados orbitais e os resultados teóricos para o Vanguard I. Um ano depois, Kozai (1961a), motivado pelos dois trabalhos anteriores, reescreveu a teoria analítica desenvolvida para o movimento de um satélite por Kozai (1959, 1961b), considerando agora a Pressão de Radiação Solar. Mais tarde, Ferraz-Mello (1972) desenvolveu um modelo analítico usando a série de Fourier (DEIENNO et al., 2016).

Após um extenso desenvolvimento analítico, observou-se a inexistência dos efeitos seculares no semieixo maior, excentricidade e inclinação orbital. Um modelo secular para as perturbações da longitude do nodo ascendente e pericentro foi realizado. Os resultados numéricos indicaram apenas pequenas variações na longitude do nodo ascendente e no pericentro do satélite, principalmente para órbitas de baixa inclinação. O objetivo desse trabalho, no entanto, era mostrar que, embora os efeitos da sombra da Terra sejam importantes, se considerarmos uma Terra esférica e não levarmos em conta o movimento do Sol, a pressão de radiação solar atua sempre da mesma forma, causando perturbações seculares. Por outro lado, se considerarmos o movimento do Sol, e principalmente o achatamento da Terra, a órbita do satélite, faz com que a pressão de radiação solar mude de um lado para o outro. Como resultado líquido, isso transforma todas as perturbações seculares em perturbações de longo período e é por isso que não foram apreciados efeitos seculares no semieixo maior, excentricidade e inclinação orbital. A Figura 12 mostra o comportamento dos termos que aparecem no potencial perturbador.



Fonte: COSTA, (2020)

Figura 12 - Ilustração do comportamento de uma solução genérica devido a cada tipo de termo perturbativo.

Todos esses trabalhos foram de grande importância para a compreensão do movimento de um satélite sob os efeitos da Pressão de Radiação Solar. Eles foram usados como base de muitas outras pesquisas que apareceram mais tarde.

De acordo com Deienno et al. (2016), Krivov e Getino (1997) estudaram e mapearam a relação entre a altitude e a razão área-massa de um satélite em grandes altitudes e a razão área-massa em uma órbita equatorial. Eles mostraram como a excentricidade orbital do satélite evolui durante o tempo para diferentes valores de  $A/m$ . Os autores observaram grandes variações nos elementos orbitais, dependendo dos parâmetros utilizados.

Em Lucking et al. (2012), o efeito  $J_2$  (achatamento nos polos) faz com que a excentricidade do satélite seja liberada em uma órbita com um semieixo maior quase constante. Assim, alterando a razão área-massa, obtém-se um aumento na excentricidade orbital, resultando na desórbita do satélite (como feito em Krivov e Getino (1997) para órbitas equatoriais). Lucking et al. (2012) também fizeram uso de um modelo analítico para tentar fazer uma primeira estimativa dos valores desorbitais

de A/m. Em Gong e McDonald (2019) é analisado como a pressão de radiação solar exerce uma força sobre a Vela Solar no espaço. O nível de aceleração da pressão de radiação solar é determinado pela razão área-massa ou densidade de área da nave espacial.

## 2.4. Equações fundamentais

Em Carvalho et al. (2016) é feito um estudo da dinâmica da vela solar levando em consideração a distribuição não uniforme de massa ( $J_2$ ,  $J_3$ ,  $C_{22}$ ), terceiro corpo (Sol) e a Pressão de Radiação Solar. Em Carvalho (2017), Carvalho et al. (2016), Tresaco et al. (2016) e Tresaco et al. (2018) os autores apresentam um estudo do movimento orbital de satélites artificiais em torno de planetas e/ou satélites planetários (ver também Carvalho, 2011) através de uma teoria semianalítica, em que as simulações numéricas são feitas com o auxílio do software Maple.

Em Tresaco et al. (2016), a equação de movimento da nave espacial é dada por:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_M + \ddot{\mathbf{r}}_{3b} + \ddot{\mathbf{r}}_{SRP}. \quad (1)$$

Na Eq. (1), onde  $\ddot{\mathbf{r}}_M$  é a força induzida pelo campo de gravidade de Mercúrio, que pode ser expressa como o gradiente de um determinado potencial  $U_M$  que está escrito em termos do vetor de posição  $\mathbf{r}$  da espaçonave em relação ao planeta central Mercúrio, como mostra a Eq. (2):

$$\ddot{\mathbf{r}}_M = \nabla U_M(\mathbf{r}) \quad (2)$$

O termo  $\ddot{\mathbf{r}}_{3b}$  dado na Eq. (3) é o resultado da atração gravitacional do terceiro corpo (Sol).

$$\ddot{\mathbf{r}}_{3b} = -\mu_{\odot} \left( \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\odot}\|^3} + \frac{\mathbf{r}_{\odot}}{\|\mathbf{r}_{\odot}\|^3} \right) \quad (3)$$

Em Tresaco et al. (2018) a aceleração exercida em um corpo perfeitamente refletido pela radiação solar, expressa na Eq. (4), no sistema inercial Oxyz, centrada em Mercúrio, é:

$$\ddot{r}_{PRS} = -2P \frac{A}{M} \frac{r - r_{\odot}}{\|r - r_{\odot}\|}, \quad (4)$$

em que  $(r - r_{\odot})$  é o vetor na direção da sonda para o Sol,  $(A/m)$  é o coeficiente de área-massa da sonda, o sinal de menos na Eq. (4) surge porque a direção positiva desse vetor é definida oposta à da aceleração e  $P$ , ver Eq. (5), indica a Pressão de Radiação Solar. Em que  $P$  é dado por:

$$P = \frac{I}{c} \quad (5)$$

em que  $I$  é o fluxo solar na superfície do plano iluminado e  $c$  é a velocidade da luz. O fluxo solar  $I$ , Eq. (6), é definido como a quantidade de energia recebida na superfície do satélite iluminado.

$$I = I_0 \left( \frac{1}{\rho} \right)^2 \quad (6)$$

em que a Constante Solar  $I_0$  em 1 unidade astronômica (UA) é  $1358 \text{ W/m}^2$  e  $\rho$  é a distância média de Mercúrio ao Sol (0,387 UA).

Em Tresaco et al. (2016), a Eq. (7) é a equação que representa  $\beta$ , um parâmetro adimensional que representa a proporção adimensional da aceleração da Pressão de Radiação Solar em relação à aceleração gravitacional solar que mede a eficiência da vela. A Eq. (8) representa o parâmetro de carregamento crítico para Mercúrio e a Eq. (9) representa o parâmetro de carregamento da vela (densidade da área) (TRESACO et al., 2018 e MCINNES, 1999).

$$\beta = \frac{\sigma^*}{\sigma} \quad (7)$$

$$\sigma^* = 1.53 \left( \frac{1}{\rho} \right)^2 \quad (8)$$

No caso de Mercúrio, temos que:

$$\sigma^* = 10,26 \frac{g}{m^2}$$

$$\sigma = \frac{m}{A} \quad (9)$$

A aceleração da vela solar também pode ser expressa como em termos de luminosidade do Sol  $L_{\odot}$ :

$$\ddot{r}_{SRP} = \frac{L_{\odot}}{c2\pi\rho^2} \frac{A}{m} (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n})^2 \mathbf{n} \quad (10)$$

Na Eq. (10), assumiremos que a vela mantém uma orientação fixa perpendicular à linha do sol ( $\mathbf{u}_i \parallel \mathbf{n}$ ), então o efeito da vela assume seu valor máximo  $(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}) = 1$ . Nesse caso, o parâmetro de carregamento da vela pode ser escrito como:  $\sigma^* = L_{\odot}/c2\pi\mu_{\odot}$ . Assim, considerando-se que a vela deve manter a orientação perpendicular à linha do sol  $\mathbf{n} = \rho/||\rho||$ , e a vela está localizada à distância do sol  $\rho = ||r - r_{\odot}||$ , a Pressão de Radiação Solar é dada pela Eq. (11) (TRESACO et al., 2016):

$$\ddot{r}_{SRP} = \beta\mu_{\odot} \frac{r - r_{\odot}}{||r - r_{\odot}||^3} \quad (11)$$

Como afirmado anteriormente, a perturbação devido à Pressão de Radiação Solar depende fortemente do tamanho e massa da nave espacial e da altitude da órbita; assim, vamos variar o coeficiente área-massa do satélite e sua altitude para visualizar seu impacto na dinâmica da vela.

O movimento da vela solar em torno de Mercúrio sob seu efeito gravitacional e perturbado pela atração gravitacional do Sol e pela Pressão de Radiação Solar é descrito pela Eq. (12):

$$\ddot{r} = \ddot{r}_M + \ddot{r}_{3b} + \ddot{r}_{SRP} = \nabla U_M(\mathbf{r}) - \mu_{\odot} \left( \frac{r - r_{\odot}}{||r - r_{\odot}||^3} + \frac{r_{\odot}}{||r_{\odot}||^3} \right) + \beta\mu_{\odot} \frac{r - r_{\odot}}{||r - r_{\odot}||^3} \quad (12)$$

Agora, reescrevendo a Eq. (12) em função dos elementos orbitais usando equações conhecidas da Mecânica Celeste e modelo de média. Depois de manipulações algébricas obtemos as Eqs. (13) até (18), que descrevem a não esfericidade do corpo central que são escritas na forma (CARVALHO et al. 2016 e TRESACO et al., 2018)

$$\langle R_{J_2} \rangle = -\frac{1}{4} \mu R_M^2 J_2 \frac{n^2(-2+3\text{sen}^2 i)}{(1-e^2)^{3/2}}; \quad (13)$$

$$\langle R_{J_3} \rangle = -\frac{3}{8} \mu R_M^3 J_3 \frac{en^2 \text{sen} i \text{ seng} (-4+5\text{sen}^2 i)}{a(1-e^2)^{5/2}}; \quad (14)$$

$$\langle R_{J_4} \rangle = \frac{3}{128} R_M^4 J_4 \frac{1}{(-e^2 + 1)^{7/2} a^2} n^2 (-175e^2 \sin(i)^4 + 80\sin(i)^2 - 70\sin(i)^4 - 180e^2 \sin(i)^2 + 140e^2 \sin(i)^4 \cos(g)^2 - 24e^2 - 120e^2 \sin(i)^2 \cos(g)^2 - 16) \quad (15)$$

$$\langle R_{J_5} \rangle = \frac{5}{256} R_M^5 J_5 \frac{1}{(-e^2 + 1)^{9/2} a^3} n^2 (\sin(i) e (672\sin(i)^2 - 192 - 144e^2 \sin(i)^2 - 224e^2 \sin(i)^2 \cos(g)^2 - 504 \sin(i)^4 - 441e^2 \sin(i)^4 + 560e^2 \sin(i)^2 + 252 e^2 \sin(i)^4 \cos(g)^2) \sin(g)) \quad (16)$$

$$\langle R_{J_6} \rangle = \frac{5}{4096} R_M^6 J_6 \frac{1}{(-e^2 + 1)^{11/2} a^4} n^2 (25200e^4 \sin(i)^4 \cos(g)^2 - 1280e^2 - 480e^4 + 5544e^4 \sin(i)^6 \cos(g)^4 - 19404e^4 \sin(i)^6 \cos(g)^4 - 256 - 13440e^2 \sin(i)^2 \cos(g)^2 - 27720e^2 \sin(i)^6 \cos(g)^2 + 3696 \sin(i)^6 + 14553e^4 \sin(i)^6 - 22050e^4 \sin(i)^4 - 50400e^4 \sin(i)^4 + 20160e^2 \sin(i)^2 - 6048 \sin(i)^4 + 40320e^2 \sin(i)^4 \cos(g)^2 - 5040e^4 \sin(i)^4 \cos(g)^4 - 6720e^2 \sin(i)^2 \cos(g)^2 + 32340e^2 \sin(i)^6 + 2688 \sin(i)^2 + 8400e^4 \sin(i)^2) \quad (17)$$

Agora, para representar o efeito devido a elipticidade equatorial ( $C_{22}$ ) do planeta, o potencial é dado por (CARVALHO et al. 2016 e TRESACO et al. 2018)

$$\langle R_{C_{22}} \rangle = \frac{3}{2} R_M^2 C_{22} \frac{n^2 \text{sen}^2 i \cos(2n_M t - 2h)}{(1-e^2)^{3/2}} \quad (18)$$

em que  $n$  é o movimento médio do satélite em torno de Mercúrio,  $n_M$  é o movimento médio de Mercúrio em torno do Sol e  $t$  é o tempo.

Na tabela 2 são exibidos os valores dos coeficientes harmônicos esféricos normalizados de Mercúrio (CARBONE et al. 2020, MAZARICO et al. 2014, TRESACO et al., 2018 e VERMA AND MARGOT, 2016).

Tabela 2 - Coeficientes harmônicos de Mercúrio normalizados	
J <sub>2</sub>	2.25100 x 10 <sup>-5</sup>
J <sub>3</sub>	4.71444 x 10 <sup>-6</sup>
J <sub>4</sub>	5.89291 x 10 <sup>-6</sup>
J <sub>5</sub>	-2.98686 x 10 <sup>-7</sup>
J <sub>6</sub>	-1.90218 x 10 <sup>-6</sup>
C <sub>22</sub>	1.24973 x 10 <sup>-5</sup>

Para representar a Perturbação do Terceiro Corpo (Sol) o potencial de média simples em órbita elíptica e inclinada é dado pela Eq. (19) (CARVALHO et al. em andamento):

$$\begin{aligned}
 R_{2MS} := & \frac{255}{256} N^2 \left( \frac{7}{17} e_M e^2 (\cos(i_M) - 1)^2 (\cos(i) - 1)^2 \cos(-3 l_M + 2 g - 2 h \right. \\
 & - 2 g_M + 2 h_M) + \frac{7}{17} e_M e^2 (\cos(i_M) - 1)^2 (1 + \cos(i))^2 \cos(3 l_M + 2 g + 2 h \\
 & + 2 g_M - 2 h_M) - \frac{1}{17} e_M e^2 (1 + \cos(i_M))^2 (\cos(i) - 1)^2 \cos(2 g - 2 h + 2 g_M \\
 & + 2 h_M + l_M) - \frac{1}{17} e_M e^2 (\cos(i_M) - 1)^2 (\cos(i) - 1)^2 \cos(-l_M + 2 g - 2 h \\
 & - 2 g_M + 2 h_M) - \frac{1}{17} e_M e^2 (1 + \cos(i_M))^2 (1 + \cos(i))^2 \cos(-l_M + 2 g + 2 h \\
 & \left. - 2 g_M - 2 h_M) - \frac{1}{17} e_M e^2 (\cos(i_M) - 1)^2 (1 + \cos(i))^2 \cos(l_M + 2 g + 2 h \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 g_M - 2 h_M) + \frac{7}{17} e_M e^2 (1 + \cos(i_M))^2 (1 + \cos(i))^2 \cos(-3 l_M + 2 g + 2 h \\
& - 2 g_M - 2 h_M) - \frac{5}{17} (\cos(i_M) - 1)^2 e^2 \left( e_M^2 - \frac{2}{5} \right) (1 + \cos(i))^2 \cos(2 g + 2 h \\
& + 2 g_M - 2 h_M + 2 l_M) + \frac{7}{17} e_M e^2 (1 + \cos(i_M))^2 (\cos(i) - 1)^2 \cos(2 g - 2 h \\
& + 2 g_M + 2 h_M + 3 l_M) - \frac{5}{17} e^2 \left( e_M^2 - \frac{2}{5} \right) (1 + \cos(i_M))^2 (1 \\
& + \cos(i))^2 \cos(2 g + 2 h - 2 g_M - 2 h_M - 2 l_M) - \frac{5}{17} (\cos(i_M) - 1)^2 (\cos(i) \\
& - 1)^2 e^2 \left( e_M^2 - \frac{2}{5} \right) \cos(2 g - 2 h - 2 g_M + 2 h_M - 2 l_M) - \frac{5}{17} (\cos(i) \\
& - 1)^2 e^2 \left( e_M^2 - \frac{2}{5} \right) (1 + \cos(i_M))^2 \cos(2 g - 2 h + 2 g_M + 2 h_M + 2 l_M) \\
& + \frac{108}{85} e_M^2 \left( (\cos(i)^2 + 1) \cos(i_M)^2 + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 + \cos(i)^2 - \frac{5}{3} \right) \left( e^2 \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} \right) \cos(2 l_M) - \frac{18}{17} e^2 e_M^2 \left( (\cos(i)^2 - 1) \cos(i_M)^2 + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 \right. \\
& \left. + \cos(i)^2 - 1) \cos(2 g + 2 l_M) + 2 e^2 \left( (\cos(i)^2 - 1) \cos(i_M)^2 + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - \cos(i)^2 + 1) e_M^2 \cos(-4 l_M - 2 g_M + 2 g) + \frac{14}{17} e^2 \left( (\cos(i)^2 - 1) \cos(i_M)^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 \right) \cos(i)^2 + 1) e_M \cos(3 l_M - 2 g_M + 2 g) \right. \\
& \left. + \frac{1}{85} \left( 12 (\cos(i)^2 + 1) \cos(i_M)^2 + 24 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 - 12 \cos(i)^2 - 12 \right) e_M \left( e^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{2}{3} \right) \cos(l_M + 2 g_M) - \frac{1}{5} \left( 12 (\cos(i)^2 + 1) \cos(i_M)^2 + 24 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. - 12 \cos(i)^2 - 12 \right) e_M^2 \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(4 l_M + 2 g_M) - \frac{1}{85} \left( 84 (\cos(i)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 1) \cos(i_M)^2 + 168 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 - 84 \cos(i)^2 - 84 \right) e_M \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(3 l_M \right. \\
& \left. + 2 g_M) + 2 e^2 \left( (\cos(i)^2 - 1) \cos(i_M)^2 + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 - \cos(i)^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + 1) e_M^2 \cos(4 l_M + 2 g_M + 2 g) - \frac{18}{17} e^2 e_M^2 \left( (\cos(i)^2 - 1) \cos(i_M)^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 + \cos(i)^2 - 1) \cos(2 g - 2 l_M) - \frac{10}{17} e^2 \left( e_M^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{2}{5} \right) \left( (\cos(i)^2 - 1) \cos(i_M)^2 + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 - \cos(i)^2 + 1) \cos(2 g_M + 2 g \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 l_M) - \frac{12}{17} e^2 \left( e_M^2 + \frac{2}{3} \right) \left( (\cos(i)^2 - 1) \cos(i_M)^2 + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 \right. \\
& + \cos(i)^2 - 1) \cos(2g) + \frac{1}{17} \left( 12 e_M^2 - \frac{24}{5} \right) \left( (\cos(i)^2 + 1) \cos(i_M)^2 \right. \\
& + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 - \cos(i)^2 - 1) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(2g_M + 2l_M) \\
& - \frac{2}{17} e^2 \left( (\cos(i)^2 - 1) \cos(i_M)^2 + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 - \cos(i)^2 + 1) e_M \cos(-l_M \right. \\
& - 2g_M + 2g) - \frac{12}{17} e^2 e_M \left( (\cos(i)^2 - 1) \cos(i_M)^2 + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 + \cos(i)^2 \right. \\
& - 1) \cos(-l_M + 2g) + \frac{14}{17} e^2 \left( (\cos(i)^2 - 1) \cos(i_M)^2 + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 \right. \\
& - \cos(i)^2 + 1) e_M \cos(3l_M + 2g_M + 2g) - \frac{10}{17} e^2 \left( e_M^2 - \frac{2}{5} \right) \left( (\cos(i)^2 \right. \\
& - 1) \cos(i_M)^2 + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 - \cos(i)^2 + 1) \cos(-2g_M + 2g - 2l_M) \\
& - \frac{12}{17} e^2 e_M \left( (\cos(i)^2 - 1) \cos(i_M)^2 + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 + \cos(i)^2 - 1) \cos(l_M \right. \\
& + 2g) - \frac{2}{17} e^2 \left( (\cos(i)^2 - 1) \cos(i_M)^2 + 2 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 - \cos(i)^2 \right. \\
& + 1) e_M \cos(l_M + 2g_M + 2g) + \frac{1}{85} \left( 72 (\cos(i)^2 + 1) \cos(i_M)^2 \right. \\
& + 144 \sin(i)^2 \sin(i_M)^2 + 72 \cos(i)^2 - 120) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \left( e_M \cos(l_M) + \frac{1}{2} e_M^2 \right. \\
& + \frac{1}{3} \left. \right) + e_M^2 e^2 (\cos(i_M) - 1)^2 (\cos(i) - 1)^2 \cos(-4l_M + 2g - 2h - 2g_M \\
& + 2h_M) + e_M^2 e^2 (1 + \cos(i_M))^2 (1 + \cos(i))^2 \cos(-4l_M + 2g + 2h - 2g_M \\
& - 2h_M) + e_M^2 e^2 (1 + \cos(i_M))^2 (\cos(i) - 1)^2 \cos(4l_M + 2g - 2h + 2g_M \\
& + 2h_M) + e_M^2 e^2 (\cos(i_M) - 1)^2 (1 + \cos(i))^2 \cos(4l_M + 2g + 2h + 2g_M \\
& - 2h_M) + \frac{6}{17} (\cos(i_M) - 1)^2 (\cos(i) - 1) \left( e_M^2 - \frac{2}{5} \right) (1 + \cos(i)) \left( e^2 \right. \\
& + \frac{2}{3} \left. \right) \cos(2g_M - 2h_M + 2h + 2l_M) + \frac{6}{85} (\cos(i_M) - 1)^2 (\cos(i) - 1) e_M (1 \\
& + \cos(i)) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(l_M + 2g_M - 2h_M + 2h) - \frac{6}{17} e_M e^2 (\cos(i_M) - 1) (1 \\
& + \cos(i_M)) (\cos(i) - 1)^2 \cos(l_M + 2g - 2h + 2h_M) - \frac{9}{17} e_M^2 e^2 (\cos(i_M)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1) (1 + \cos(i_{\underline{M}})) (1 + \cos(i))^2 \cos(2g + 2h - 2h_{\underline{M}} + 2l_{\underline{M}}) \\
& - \frac{9}{17} e_{\underline{M}}^2 e^2 (\cos(i_{\underline{M}}) - 1) (1 + \cos(i_{\underline{M}})) (\cos(i) - 1)^2 \cos(2g - 2h + 2h_{\underline{M}} \\
& + 2l_{\underline{M}}) - \frac{1}{85} (42 \cos(i) - 42) (1 + \cos(i_{\underline{M}}))^2 e_{\underline{M}} (1 + \cos(i)) \left( e^2 \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} \right) \cos(3l_{\underline{M}} - 2h + 2g_{\underline{M}} + 2h_{\underline{M}}) - \frac{1}{17} (6 \cos(i_{\underline{M}}) - 6) (\cos(i) \\
& - 1)^2 e^2 \left( e_{\underline{M}}^2 + \frac{2}{3} \right) (1 + \cos(i_{\underline{M}})) \cos(2g - 2h + 2h_{\underline{M}}) + \frac{1}{17} (6 \cos(i) \\
& - 6) \left( e_{\underline{M}}^2 - \frac{2}{5} \right) (1 + \cos(i_{\underline{M}}))^2 (1 + \cos(i)) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(-2h + 2g_{\underline{M}} \\
& + 2h_{\underline{M}} + 2l_{\underline{M}}) - \frac{6}{17} e_{\underline{M}} e^2 (\cos(i_{\underline{M}}) - 1) (1 + \cos(i_{\underline{M}})) (1 + \cos(i))^2 \cos(2g \\
& + 2h - 2h_{\underline{M}} - l_{\underline{M}}) - \frac{1}{5} (6 \cos(i) - 6) (1 + \cos(i_{\underline{M}}))^2 e_{\underline{M}}^2 (1 + \cos(i)) \left( e^2 \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} \right) \cos(4l_{\underline{M}} - 2h + 2g_{\underline{M}} + 2h_{\underline{M}}) - \frac{9}{17} e_{\underline{M}}^2 e^2 (\cos(i_{\underline{M}}) - 1) (1 \\
& + \cos(i_{\underline{M}})) (\cos(i) - 1)^2 \cos(2g - 2h + 2h_{\underline{M}} - 2l_{\underline{M}}) - \frac{6}{5} (\cos(i_{\underline{M}}) \\
& - 1)^2 (\cos(i) - 1) e_{\underline{M}}^2 (1 + \cos(i)) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(4l_{\underline{M}} + 2g_{\underline{M}} - 2h_{\underline{M}} + 2h) \\
& + \frac{1}{85} (6 \cos(i) - 6) (1 + \cos(i_{\underline{M}}))^2 e_{\underline{M}} (1 + \cos(i)) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(l_{\underline{M}} - 2h \\
& + 2g_{\underline{M}} + 2h_{\underline{M}}) - \frac{1}{17} (6 \cos(i_{\underline{M}}) - 6) e^2 \left( e_{\underline{M}}^2 + \frac{2}{3} \right) (1 + \cos(i_{\underline{M}})) (1 \\
& + \cos(i))^2 \cos(2g + 2h - 2h_{\underline{M}}) - \frac{6}{17} e_{\underline{M}} e^2 (\cos(i_{\underline{M}}) - 1) (1 \\
& + \cos(i_{\underline{M}})) (1 + \cos(i))^2 \cos(2g + 2h - 2h_{\underline{M}} + l_{\underline{M}}) - \frac{42}{85} (\cos(i_{\underline{M}}) \\
& - 1)^2 (\cos(i) - 1) e_{\underline{M}} (1 + \cos(i)) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(3l_{\underline{M}} + 2g_{\underline{M}} - 2h_{\underline{M}} + 2h) \\
& - \frac{9}{17} e_{\underline{M}}^2 e^2 (\cos(i_{\underline{M}}) - 1) (1 + \cos(i_{\underline{M}})) (1 + \cos(i))^2 \cos(2g + 2h - 2h_{\underline{M}} \\
& - 2l_{\underline{M}}) - \frac{6}{17} e_{\underline{M}} e^2 (\cos(i_{\underline{M}}) - 1) (1 + \cos(i_{\underline{M}})) (\cos(i) - 1)^2 \cos(-l_{\underline{M}} + 2g \\
& - 2h + 2h_{\underline{M}}) - \frac{4}{17} e_{\underline{M}} \sin(i) \sin(i_{\underline{M}}) e^2 (\cos(i_{\underline{M}}) - 1) (1 + \cos(i)) \cos(2g \\
& + 2g_{\underline{M}} - h_{\underline{M}} + h + l_{\underline{M}}) - \frac{4}{17} e_{\underline{M}} \sin(i) \sin(i_{\underline{M}}) e^2 (1 + \cos(i_{\underline{M}})) (\cos(i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -1) \cos(l_M + 2g + 2g_M - h + h_M) + 4e_M^2 \sin(i) \sin(i_M) e^2 (\cos(i_M)) \\
& -1) (\cos(i) - 1) \cos(2g - 2g_M + h_M - h - 4l_M) + 4e_M^2 \sin(i) \sin(i_M) e^2 (1 \\
& + \cos(i_M)) (\cos(i) - 1) \cos(4l_M + 2g + 2g_M - h + h_M) \\
& + 4e_M^2 \sin(i) \sin(i_M) e^2 (\cos(i_M) - 1) (1 + \cos(i)) \cos(4l_M + 2g + 2g_M \\
& - h_M + h) + 4e_M^2 \sin(i) \sin(i_M) e^2 (1 + \cos(i_M)) (1 + \cos(i)) \cos(-4l_M + 2g \\
& - 2g_M - h_M + h) + \frac{1}{17} \left( 24e_M^2 - \frac{48}{5} \right) (1 \\
& + \cos(i_M)) \sin(i_M) \sin(i) \cos(i) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(2g_M - h + h_M + 2l_M) \\
& - \frac{1}{17} (20 \cos(i_M) - 20) e^2 \left( e_M^2 - \frac{2}{5} \right) \sin(i_M) \sin(i) (1 + \cos(i)) \cos(2g \\
& + 2g_M - h_M + h + 2l_M) - \frac{1}{5} (24 \cos(i_M)) \\
& - 24) \sin(i_M) e_M^2 \sin(i) \cos(i) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(4l_M + 2g_M - h_M + h) \\
& + \frac{1}{85} (24 \cos(i_M) - 24) \sin(i_M) e_M \sin(i) \cos(i) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(2g_M - h_M + h \\
& + l_M) + \frac{1}{85} (144e_M^2 + 96) \cos(i_M) \sin(i_M) \sin(i) \cos(i) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(-h_M \\
& + h) - \frac{24}{17} e_M \cos(i_M) \sin(i) \sin(i_M) e^2 (1 + \cos(i)) \cos(2g - h_M + h - l_M) \\
& - \frac{1}{85} (168 + 168 \cos(i_M)) \sin(i_M) e_M \sin(i) \cos(i) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(3l_M + 2g_M \\
& - h + h_M) - \frac{24}{17} e_M \cos(i_M) \sin(i) \sin(i_M) e^2 (1 + \cos(i)) \cos(l_M + 2g - h_M \\
& + h) + \frac{1}{17} (24 \cos(i_M) - 24) \left( e_M^2 - \frac{2}{5} \right) \sin(i_M) \sin(i) \cos(i) \left( e^2 \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} \right) \cos(2g_M - h_M + h + 2l_M) - \frac{4}{17} e_M \sin(i) \sin(i_M) e^2 (1 \\
& + \cos(i_M)) (1 + \cos(i)) \cos(2g - 2g_M - h_M + h - l_M) + \frac{1}{85} (36 \cos(i_M)) \\
& - 36) (\cos(i) - 1) (1 + \cos(i_M)) e_M (1 + \cos(i)) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(-2h_M + 2h \\
& + l_M) + \frac{216}{85} \cos(i_M) \sin(i_M) e_M^2 \sin(i) \cos(i) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(-h_M + h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2l_M) - \frac{24}{17} e^2 \left( e_{-M}^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(i_{-M}) \sin(i_{-M}) \sin(i) (1 + \cos(i)) \cos(2g - h_{-M} \\
& + h) - \frac{1}{85} (168 \cos(i_{-M}) - 168) \sin(i_{-M}) e_{-M} \sin(i) \cos(i) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(2g_M \\
& - h_{-M} + h + 3l_M) - \frac{24}{17} e_{-M} \cos(i_{-M}) \sin(i) \sin(i_{-M}) e^2 (\cos(i) - 1) \cos(2g \\
& + h_{-M} - h - l_M) - \frac{4}{17} e_{-M} \sin(i) \sin(i_{-M}) e^2 (\cos(i_{-M}) - 1) (\cos(i) - 1) \cos(2g \\
& - 2g_M + h_{-M} - h - l_M) + \frac{1}{85} (24 + 24 \cos(i_{-M})) \sin(i_{-M}) e_{-M} \sin(i) \cos(i) \left( e^2 \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} \right) \cos(l_M + 2g_M - h + h_M) - \frac{1}{17} (20 \cos(i_{-M}) - 20) (\cos(i) - 1) e^2 \left( e_{-M}^2 \right. \\
& \left. - \frac{2}{5} \right) \sin(i_{-M}) \sin(i) \cos(2g - 2g_M + h_{-M} - h - 2l_M) - \frac{1}{5} (24 \\
& + 24 \cos(i_{-M})) \sin(i_{-M}) e_{-M}^2 \sin(i) \cos(i) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(4l_M + 2g_M - h + h_M) \\
& + \frac{1}{85} (54 \cos(i_{-M}) - 54) (\cos(i) - 1) (1 + \cos(i_{-M})) e_{-M}^2 (1 + \cos(i)) \left( e^2 \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} \right) \cos(-2h_M + 2h - 2l_M) + \frac{1}{85} (36 \cos(i_{-M}) - 36) (\cos(i) - 1) (1 \\
& + \cos(i_{-M})) e_{-M} (1 + \cos(i)) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(-2h_M + 2h - l_M) \\
& + \frac{144}{85} \cos(i_{-M}) \sin(i_{-M}) e_{-M} \sin(i) \cos(i) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(-l_M - h_{-M} + h) \\
& - \frac{1}{17} (20 \cos(i) - 20) e^2 \left( e_{-M}^2 - \frac{2}{5} \right) (1 + \cos(i_{-M})) \sin(i_{-M}) \sin(i) \cos(2g \\
& + 2g_M - h + h_M + 2l_M) - \frac{36}{17} e_{-M}^2 \sin(i) \sin(i_{-M}) e^2 \cos(i_{-M}) (\cos(i) \\
& - 1) \cos(2g + h_{-M} - h + 2l_M) - \frac{36}{17} e_{-M}^2 \sin(i) \sin(i_{-M}) e^2 \cos(i_{-M}) (1 \\
& + \cos(i)) \cos(2g - h_{-M} + h + 2l_M) + \frac{28}{17} e_{-M} \sin(i) \sin(i_{-M}) e^2 (\cos(i_{-M}) \\
& - 1) (\cos(i) - 1) \cos(2g - 2g_M + h_{-M} - h - 3l_M) - \frac{1}{17} (24 \cos(i) \\
& - 24) e^2 \left( e_{-M}^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(i_{-M}) \sin(i_{-M}) \sin(i) \cos(2g + h_{-M} - h) \\
& + \frac{1}{85} (54 \cos(i_{-M}) - 54) (\cos(i) - 1) (1 + \cos(i_{-M})) e_{-M}^2 (1 + \cos(i)) \left( e^2 \right. \\
& \left. + \frac{2}{3} \right) \cos(-2h_M + 2h + 2l_M) + \frac{216}{85} \cos(i_{-M}) \sin(i_{-M}) e_{-M}^2 \sin(i) \cos(i) \left( e^2 \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{3} \Big) \cos(h - h_M + 2 l_M) + \frac{28}{17} e_M \sin(i) \sin(i_M) e^2 (1 + \cos(i_M)) (\cos(i) \\
& - 1) \cos(3 l_M + 2 g + 2 g_M - h + h_M) + \frac{28}{17} e_M \sin(i) \sin(i_M) e^2 (1 \\
& + \cos(i_M)) (1 + \cos(i)) \cos(2 g - 2 g_M - h_M + h - 3 l_M) \\
& - \frac{36}{17} e_M^2 \sin(i) \sin(i_M) e^2 \cos(i_M) (\cos(i) - 1) \cos(2 g - h + h_M - 2 l_M) \\
& - \frac{36}{17} e_M^2 \sin(i) \sin(i_M) e^2 \cos(i_M) (1 + \cos(i)) \cos(2 g - h_M + h - 2 l_M) \\
& - \frac{24}{17} e_M \cos(i_M) \sin(i) \sin(i_M) e^2 (\cos(i) - 1) \cos(2 g + h_M - h + l_M) \\
& + \frac{144}{85} \cos(i_M) \sin(i_M) e_M \sin(i) \cos(i) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(-h_M + h + l_M) \\
& + \frac{28}{17} e_M \sin(i) \sin(i_M) e^2 (\cos(i_M) - 1) (1 + \cos(i)) \cos(2 g + 2 g_M - h_M + h \\
& + 3 l_M) + \frac{1}{85} (36 \cos(i_M) - 36) (\cos(i) - 1) \left( e_M^2 + \frac{2}{3} \right) (1 + \cos(i_M)) (1 \\
& + \cos(i)) \left( e^2 + \frac{2}{3} \right) \cos(-2 h_M + 2 h) - \frac{20}{17} e^2 \left( e_M^2 - \frac{2}{5} \right) (1 \\
& + \cos(i_M)) \sin(i_M) \sin(i) (1 + \cos(i)) \cos(2 g - 2 g_M - h_M + h - 2 l_M) \Big) a^2
\end{aligned} \tag{19}$$

Além dos coeficientes harmônicos do potencial gravitacional de Mercúrio e da perturbação gravitacional do Sol, o modelo médio também inclui a Pressão de Radiação Solar (PRS) (CARVALHO et al. em andamento) escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
PRS := & \frac{81}{64} \frac{1}{(e_{-M^2} - 1)^2} \left( A \beta e \left( -\frac{20}{27} (\cos(i) - 1) (\cos(i_M) - 1) \left( e_{-M^2} - \frac{2}{5} \right) \cos(-l_M + g - h - g_M + h_M) \right. \right. \\
& - \frac{20}{27} \left( e_{-M^2} - \frac{2}{5} \right) (1 + \cos(i_M)) (1 + \cos(i)) \cos(-l_M + g + h - g_M - h_M) + e_{-M^2} (\cos(i_M) - 1) (\cos(i) - 1) \cos(-3l_M + g \\
& - h - g_M + h_M) + e_{-M^2} (1 + \cos(i)) (1 + \cos(i_M)) \cos(-3l_M + g + h - g_M \\
& - h_M) + \frac{16}{27} e_M (\cos(i_M) - 1) (\cos(i) - 1) \cos(-2l_M + g - h - g_M + h_M) \\
& + \frac{16}{27} e_M (1 + \cos(i)) (1 + \cos(i_M)) \cos(-2l_M + g + h - g_M - h_M) \\
& - \frac{1}{27} e_{-M^2} (1 + \cos(i_M)) (\cos(i) - 1) \cos(-l_M + g - h + g_M + h_M) \\
& - \frac{1}{27} e_{-M^2} (\cos(i_M) - 1) (1 + \cos(i)) \cos(-l_M + g_M - h_M + g + h) \\
& + \frac{1}{27} e_{-M^2} (\cos(i_M) - 1) (\cos(i) - 1) \cos(l_M + g - h - g_M + h_M) \\
& + \frac{1}{27} e_{-M^2} (1 + \cos(i)) (1 + \cos(i_M)) \cos(l_M + g + h - g_M - h_M) \\
& - \frac{16}{27} e_M (1 + \cos(i_M)) (\cos(i) - 1) \cos(2l_M + g - h + g_M + h_M) \\
& - \frac{16}{27} e_M (\cos(i_M) - 1) (1 + \cos(i)) \cos(2l_M + g_M - h_M + g + h) - e_{-M^2} (1 \\
& + \cos(i_M)) (\cos(i) - 1) \cos(3l_M + g - h + g_M + h_M) - e_{-M^2} (\cos(i_M) \\
& - 1) (1 + \cos(i)) \cos(3l_M + g_M - h_M + g + h) + \frac{20}{27} (\cos(i) - 1) \left( e_{-M^2} \right. \\
& \left. - \frac{2}{5} \right) (1 + \cos(i_M)) \cos(l_M + g - h + g_M + h_M) + \frac{20}{27} (\cos(i_M) \\
& - 1) \left( e_{-M^2} - \frac{2}{5} \right) (1 + \cos(i)) \cos(l_M + g_M - h_M + g + h) + 2 \left( \left( -\frac{20}{27} e_{-M^2} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{8}{27} \right) \cos(-l_M - g_M + g) + \cos(-3l_M - g_M + g) e_{-M^2} + \frac{16}{27} \cos(-2l_M \\
& - g_M + g) e_M - \frac{1}{27} e_{-M^2} \cos(-l_M + g_M + g) + \frac{1}{27} e_{-M^2} \cos(l_M - g_M + g) \right. \\
& \left. - \frac{16}{27} e_M \cos(2l_M + g_M + g) - e_{-M^2} \cos(3l_M + g_M + g) + \cos(l_M + g_M \right. \\
& \left. + g) \left( \frac{20}{27} e_{-M^2} - \frac{8}{27} \right) \right) \sin(i) \sin(i_M) \Big) a N^2 \Big)
\end{aligned}$$

(20)

## 2.5. Software Maple

Em Matias e Alencar (2011) o Software Maple é descrito como um sistema algébrico computacional comercial. Constitui um ambiente informático para a computação de expressões algébricas, simbólicas (pode-se usar essa capacidade simbólica para obter-se soluções analíticas exatas para muitos problemas matemáticos como diferenciação, integração etc.), permitindo o desenho de gráficos a duas ou a três dimensões.

Desde 1988, o Maple tem sido desenvolvido e comercializado pela Maplesoft, uma companhia canadense também baseada em Waterloo, Ontário.

A versão do Maple utilizada para fazer as simulações neste trabalho é a versão Maple 18, desenvolvida em março de 2014.

### 3. METODOLOGIA

Neste trabalho, é analisado o conceito de vela solar, os efeitos sobre uma vela solar em torno de Mercúrio, com destaque para a Pressão de Radiação Solar ( $R2_{PRS}$ ) que é a perturbação que mais afeta a dinâmica da vela. Considera-se a não homogeneidade do potencial do corpo central, incluindo os termos secundários do campo gravitacional de Mercúrio, como o termo  $J_2$  (achatamento nos polos) até  $J_6$  representado por  $\langle \sum_{n=2}^6 R_{Jn} \rangle$  e o harmônico zonal  $C_{22}$  (achatamento no equador) representado por  $\langle R_{C_{22}} \rangle$ . Destacando que os termos  $J_2$  e  $C_{22}$  são da mesma magnitude (TRESACO et al., 2018). Também é levado em conta a atração gravitacional do Sol no modelo de média simples ( $R2_{MS}$ ). As integrações numéricas são realizadas através do Software Maple.

O potencial perturbador, considerado neste trabalho, pode ser escrito na forma:

$$R = \langle \sum_{n=2}^6 R_{Jn} \rangle + \langle R_{C_{22}} \rangle + \langle R2_{MS} \rangle + \langle R2_{PRS} \rangle \quad (21)$$

O potencial perturbador, dado pelo Eq. (21), é substituído nas Equações Planetárias de Lagrange, um sistema de equações diferenciais não lineares, para analisarmos as influências causadas pelas perturbações consideradas na dinâmica da Vela Solar. Esse sistema de equações diferenciais é dado por:

$$\frac{de}{dt} = \frac{-\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial g} + \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M} \quad (22)$$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (23)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \quad (24)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{-1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial h} + \frac{\cos i}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin i} \frac{\partial R}{\partial g} \quad (25)$$

O sistema de equações diferenciais não lineares dados pelas Eqs. (22), (23), (24) e (25) são integradas numericamente utilizando o método de integração numérica do software Maple, "Fehlberg fourthfifth order Runge-Kutta method with degree four".

## 4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para integrar o sistema de equações diferenciais, Eqs. (22) a (25), usamos os dados orbitais da missão BepiColombo, a saber, a Mercury Magnetospheric Orbiter (MMO). As Figuras de 13 a 33 representam os gráficos da excentricidade ( $e$ ) x tempo ( $t$ ), argumento do pericentro ( $g$ ) x tempo ( $t$ ), excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ) e o comportamento no tempo da posição do pericentro ( $r_p$ ) x tempo ( $t$ ) para investigar o comportamento orbital do veículo espacial.

### 4.1. Aplicações em órbitas de alta altitude

Na Figura 13, considerou-se as seguintes condições iniciais:  $a = 8640$  km  $e = 0.67129$ ,  $g = 270^\circ$ ,  $h = 90^\circ$ ,  $i = 90^\circ$  e o tempo de integração de 10 anos. Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + C_{22}$ .

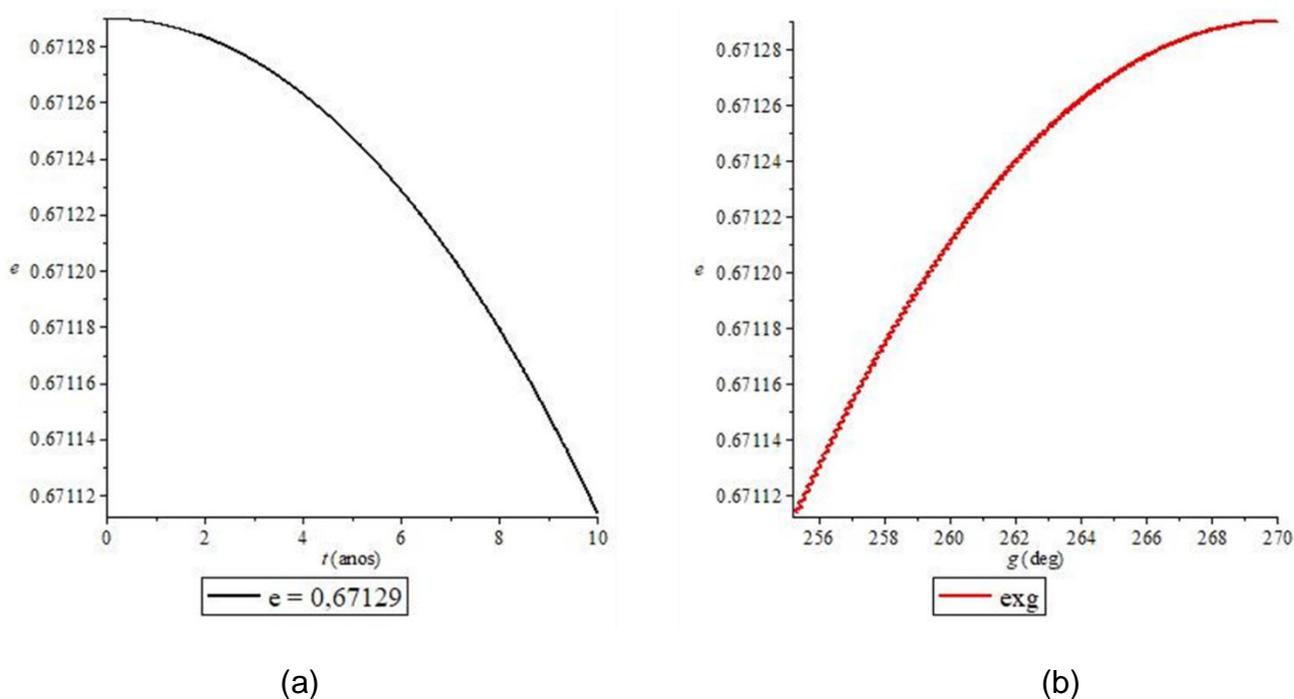


Figura 13 - excentricidade ( $e$ ) x tempo ( $t$ ) (a) e excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ) (b).

Na Figura 14, considerou-se as seguintes condições iniciais:  $a = 8640$  km  $e = 0.67129$ ,  $g = 270^\circ$ ,  $h = 90^\circ$ ,  $i = 90^\circ$  e o tempo de integração de 10 anos. Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + C_{22} + R_{2MS}$ .

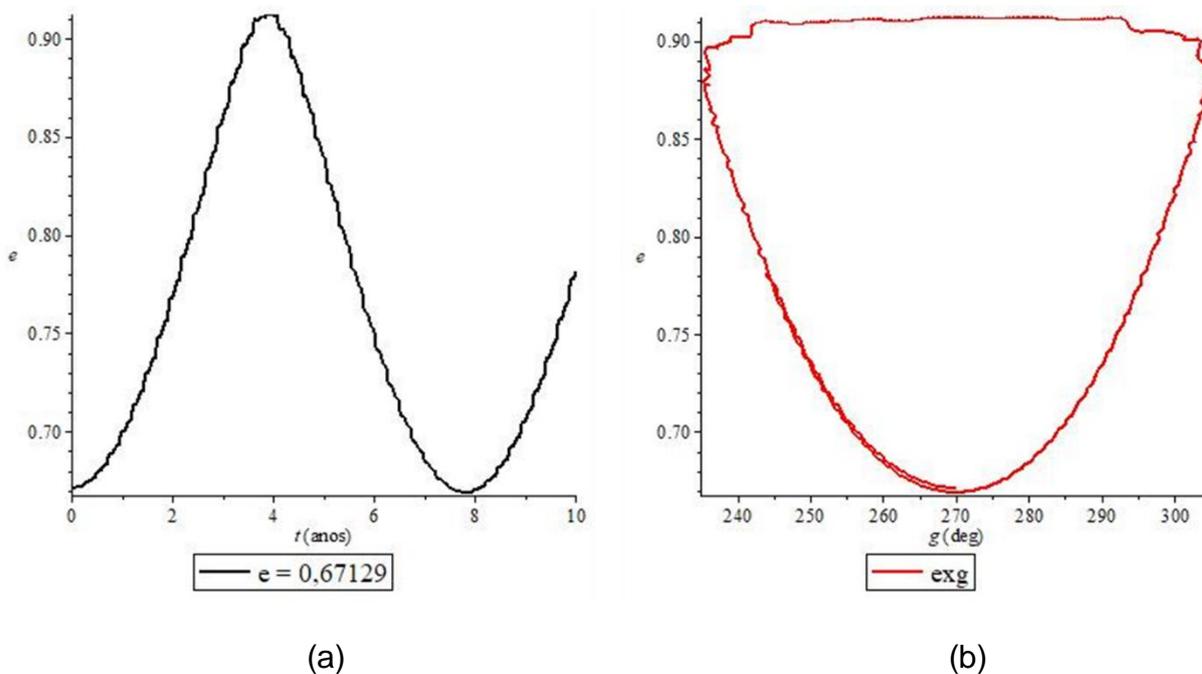


Figura 14 - excentricidade ( $e$ ) x tempo ( $t$ ) (a) e excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ) (b).

A Figura 13 mostra que levando em conta apenas a não esfericidade de Mercúrio, para uma órbita de alta altitude, a excentricidade apresenta uma pequena variação, mas comparando com a Figura 14, em que é incluindo o potencial devido ao terceiro corpo (Sol), a órbita é mais instável, ou seja, a excentricidade e argumento do pericentro estão variando bastante ao longo do tempo.

Na Figura 15, utilizou-se os mesmos parâmetros da Figura 14, porém, os gráficos são do comportamento no tempo da posição do pericentro ( $r_p$ ) x tempo ( $t$ ).

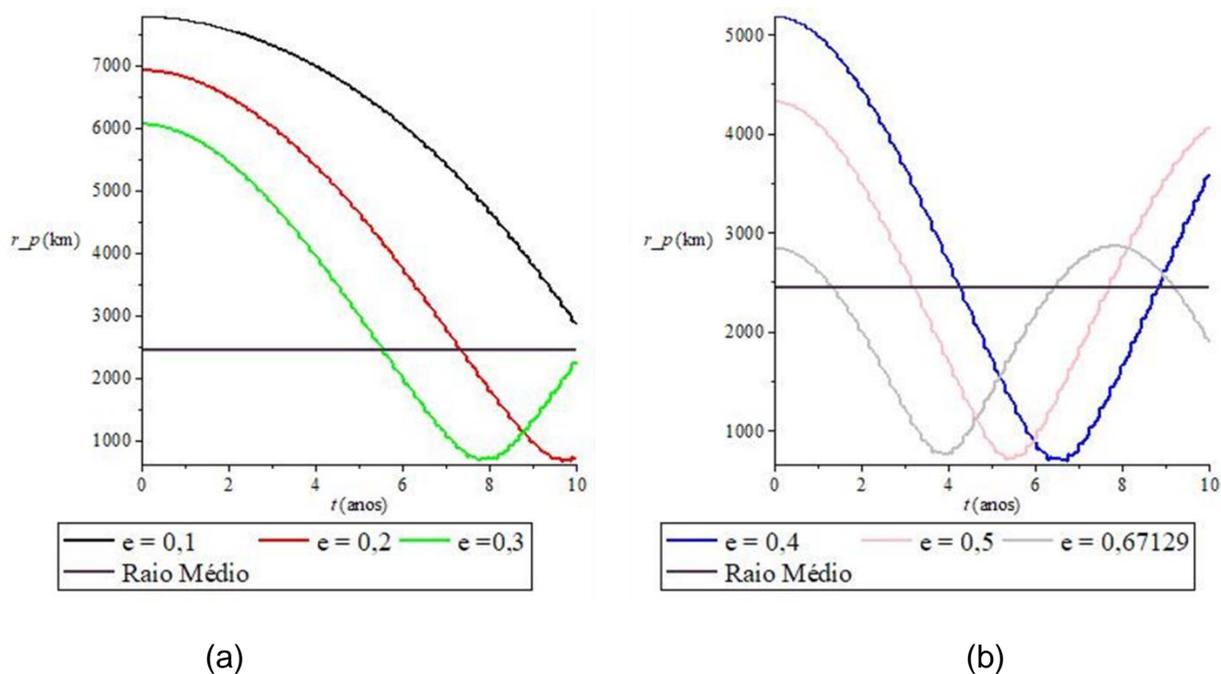


Figura 15 - Comportamento no tempo da posição do pericentro ( $r_p$ ) x tempo ( $t$ ).

A Figura 15, mostra que a excentricidade com valor inicial de 0,1 é a única que não ultrapassa o raio médio de Mercúrio durante 10 anos. Isto significa que para obtermos uma órbita com menor variação desses parâmetros orbitais, a órbita deve ser menos excêntrica. Note que a condição inicial usada nas Figuras 13 e 14,  $e=0,67129$ , é a órbita que apresenta o menor tempo de vida, ou seja, é a que o satélite colide com a superfície de Mercúrio mais rapidamente, em menos de 2 anos.

Na Figura 16, considerou-se as mesmas seguintes condições iniciais das Figuras 13 e 14. Mas, agora incluindo a pressão de radiação solar. Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + C_{22} + R_{2MS} + R_{2PRS}$ .

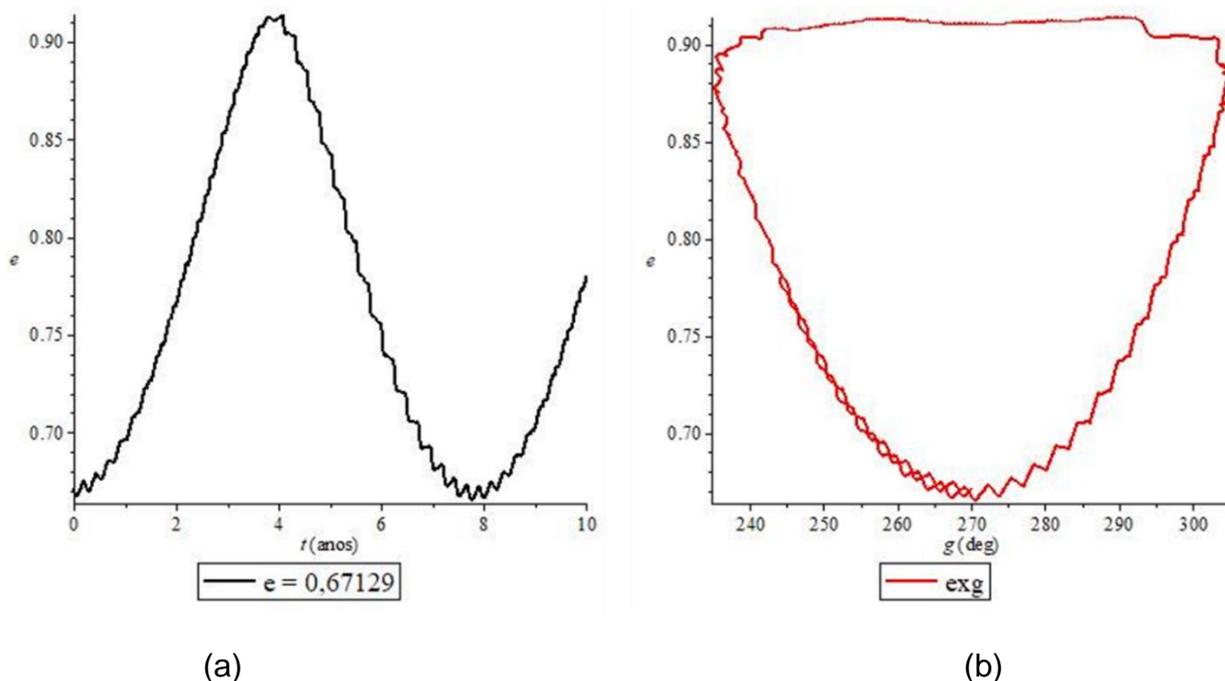
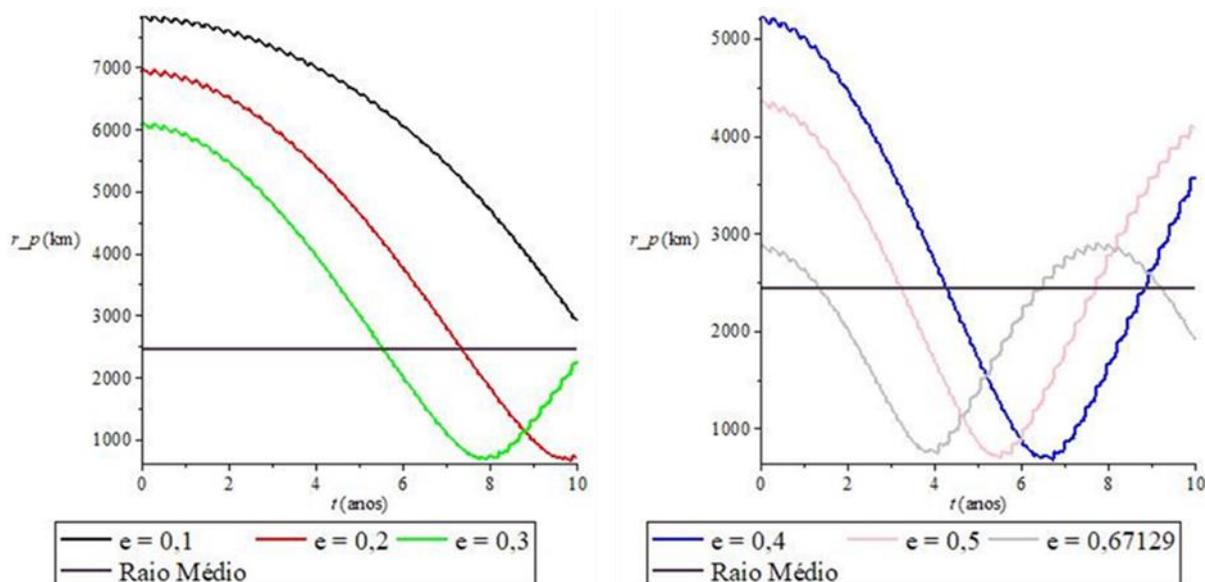


Figura 16 - Excentricidade ( $e$ ) x tempo ( $t$ ) (a) e excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ) (b), o valor de  $\beta = 0,0001$  e o valor de área/massa, utilizando a Eq. (7) ( $A/m = 9,746588694 \times 10^{-6}$ ).

Comparando as Figuras 14 e 16, temos que incluindo a pressão de radiação solar com  $\beta = 0,0001$ , a órbita praticamente não mudou, houve apenas uma pequena variação nos elementos orbitais (excentricidade e argumento do pericentro) ao longo do tempo. Na Figura 17, considerou-se as mesmas seguintes condições iniciais da Figura 16. Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + C_{22} + R_{2MS} + R_{2PRS}$ .

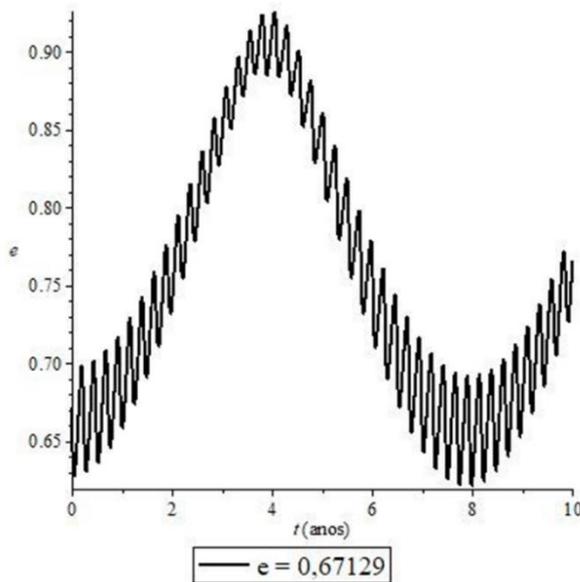


(a)

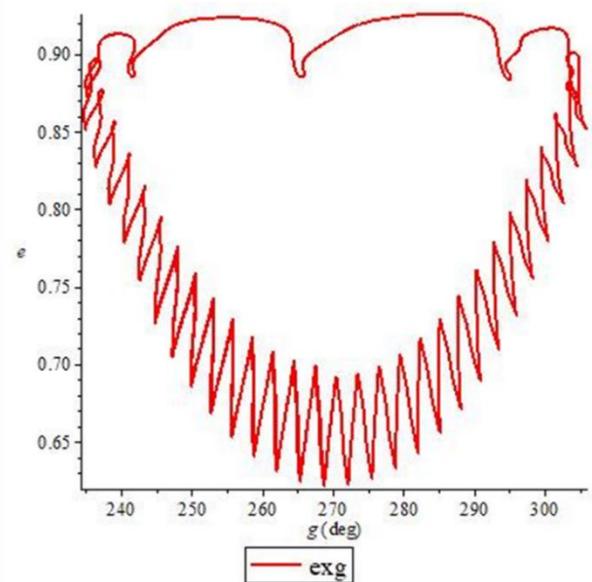
(b)

Figura 17 - Comportamento no tempo da posição do pericentro ( $r_p$ ) x tempo ( $t$ ).  $\beta = 0,0001$  e  $A/m = 9,746588694 \times 10^{-6}$ .

Nas Figuras 18 e 19, considerou-se as mesmas condições iniciais e o mesmo potencial perturbador, mas agora com  $\beta = 0,001$ .



(a)



(b)

Figura 18 - Excentricidade ( $e$ ) x tempo ( $t$ ) (a) e excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ) (b).  $\beta = 0,001$  e  $A/m = 9,746588694 \times 10^{-5}$ .

A Figura 18 mostra uma ligeira diferença no comportamento da órbita em relação a Figura 16, mas em ambos os casos a excentricidade cresce bastante. Com o aumento do valor do parâmetro beta (em relação a Figura 16) os elementos orbitais excentricidade e argumento do pericentro apresentam uma oscilação, mas não reduziu o crescimento da excentricidade.

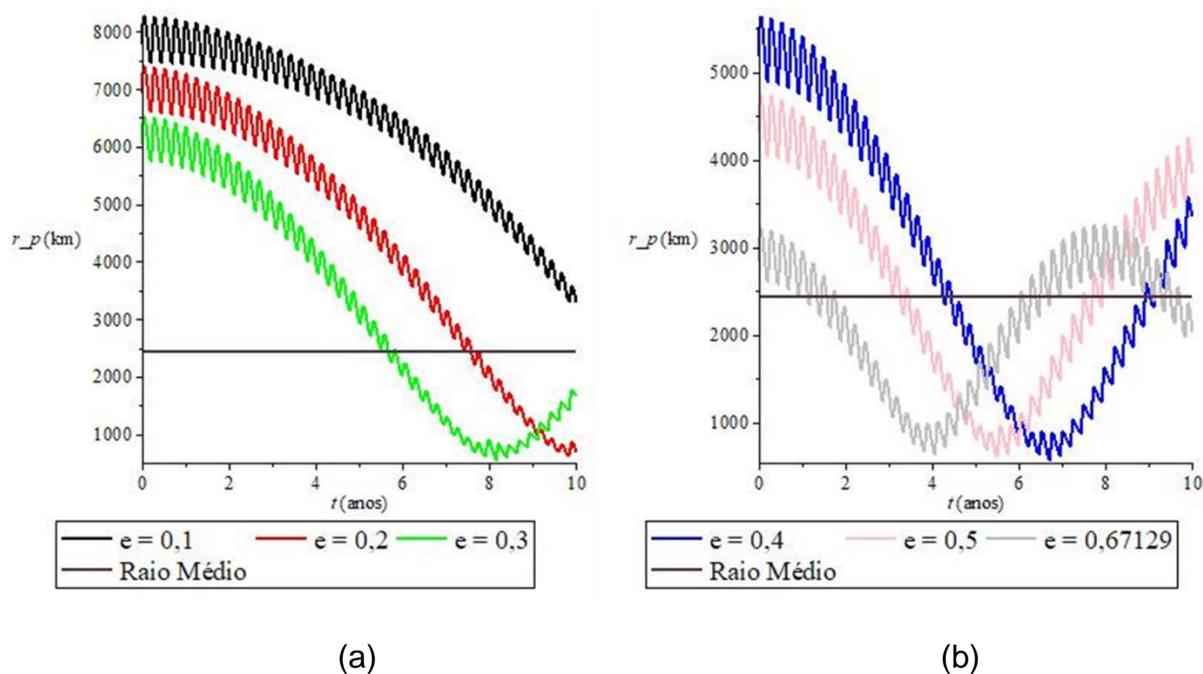


Figura 19 - Comportamento no tempo da posição do pericentro ( $r_p$ ) x tempo ( $t$ ).  $\beta = 0,001$  e  $A/m = 9,746588694 \times 10^{-5}$ .

A Figura 19 também mostra que com o aumento do valor de  $\beta$  a excentricidade oscila durante o tempo, mas o comportamento é basicamente o mesmo da Figura 17.

Nas Figuras 20 e 21, considerou-se as mesmas condições iniciais e o mesmo potencial perturbador das Figuras 16 e 18, mas agora com um coeficiente maior,  $\beta = 0,01$ .

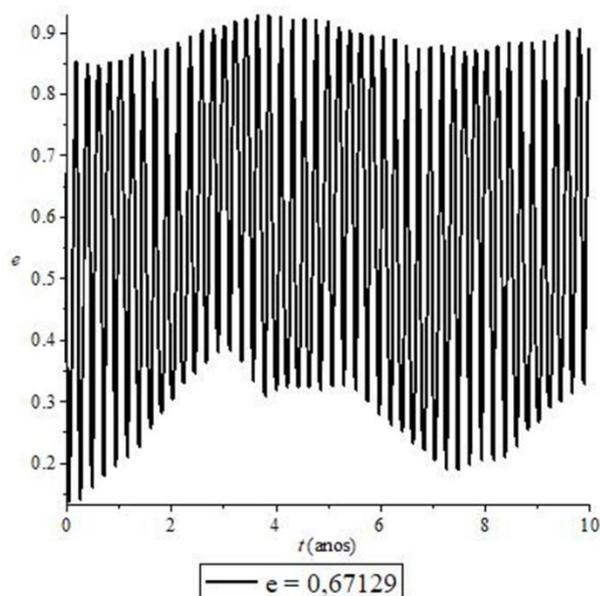


Figura 20 - Excentricidade ( $e$ ) x tempo ( $t$ ).  $\beta = 0,01$  e  $A/m = 9,746588694 \times 10^{-4}$ .

A Figura 20, apenas modificando o valor de beta em relação a Figura 18 (de 0,001 para 0,01), mostra um grande aumento da variação da excentricidade em um curto período de tempo, ou seja, com esse valor do parâmetro  $\beta = 0,01$  a órbita muito excêntrica é fortemente perturbada.

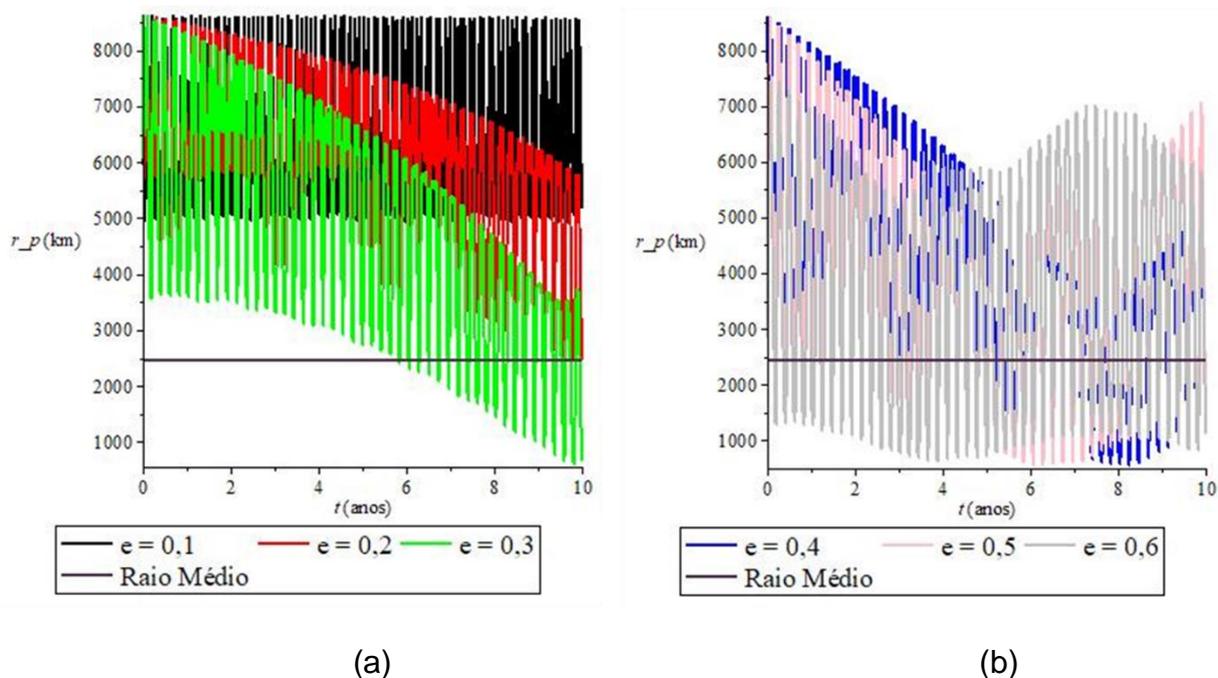


Figura 21 - Comportamento no tempo da posição do pericentro ( $r_p$ ) x tempo ( $t$ ).  $\beta = 0,01$  e  $A/m = 9,746588694 \times 10^{-4}$ .

A Figura 21 mostra que para maiores valores da excentricidade o satélite colide rapidamente com o planeta, mas agora, além da excentricidade 0,1, a excentricidade 0,2 também não colide com a superfície de Mercúrio como podemos ver na Figura 21 (a).

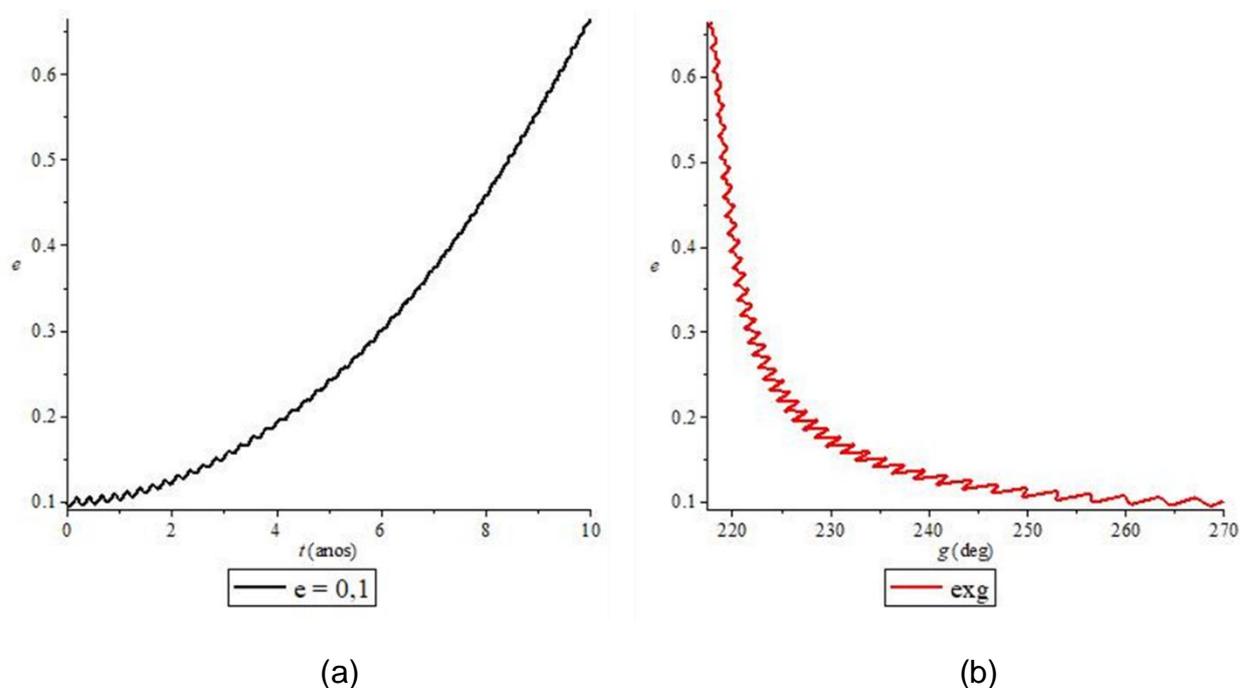


Figura 22 - Excentricidade ( $e$ ) x tempo ( $t$ ) (a) e excentricidade ( $e$ ) x Argumento do Pericentro ( $g$ ) (b).  $\beta = 0,0001$  e  $A/m = 9,746588694 \times 10^{-6}$ .

A Figura 22 mostra que, alterando o valor da excentricidade inicial (de 0,67129 para 0,1), a excentricidade que permite que o satélite permaneça por mais tempo em órbita (ver Figura 15), o comportamento da órbita tem um baixo crescimento da excentricidade durante os 4 primeiros anos. Por fim, para órbitas de alta altitude a vela solar não contribuiu para redução da excentricidade e o comportamento no tempo da posição do pericentro. O que contribuiu para aumentar o tempo de vida do satélite artificial é o valor inicial da excentricidade, neste caso, para  $e=0,1$  e 0,2 são os dois valores que permitiram uma órbita com maior tempo de vida. Maiores valores da taxa  $A/m$  menor o tempo de vida do satélite artificial.

## 4.2. Aplicações em órbitas de baixa altitude

Nesta seção, é considerado o caso de órbitas de baixa altitude, em que a perturbação dominante é a não esfericidade de Mercúrio. Na Figura 23, considerou-se as seguintes condições iniciais:  $a = 3200$  km,  $g = 270^\circ$ ,  $h = 90^\circ$ ,  $i = 90^\circ$  e o tempo de integração de 50 anos. Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + C_{22}$ .

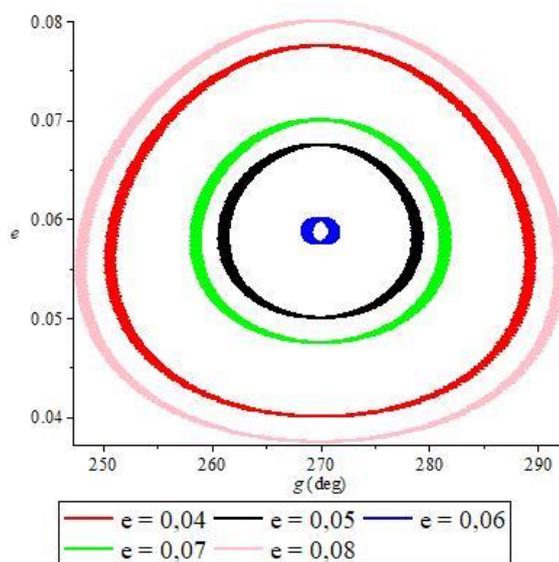


Figura 23 - Excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ).

A Figura 23 mostra que considerando apenas a não esfericidade de Mercúrio a órbita com  $e = 0,06$  é a órbita que possui a menor variação dos elementos orbitais, que está librando em torno do ponto de equilíbrio com menor amplitude, o que chamamos de órbita quase congelada (Ver Carvalho et al., 2010).

Na Figura 24, considerou-se as seguintes condições iniciais:  $a = 2700$  km,  $g = 270^\circ$ ,  $h = 90^\circ$ ,  $i = 90^\circ$  e o tempo de integração de 50 anos. Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + C_{22} + R_{2MS}$ .

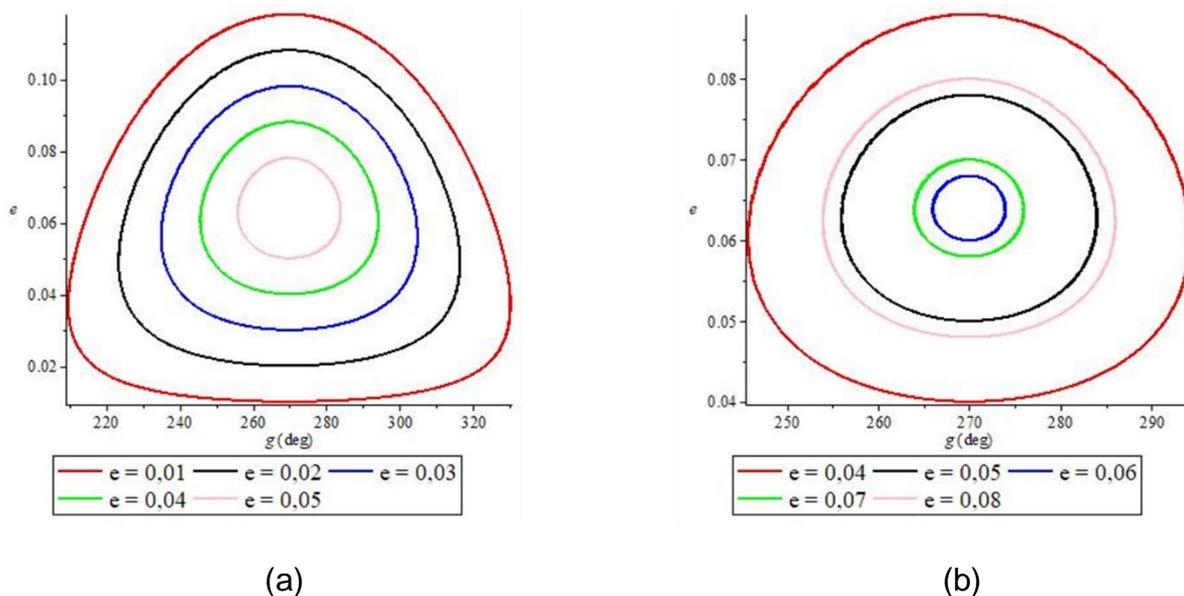


Figura 24 - Excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ).

A Figura 24 mostra que, para diferentes valores de excentricidade utilizando um semieixo maior de 2700 km, as órbitas estão librando em torno do ponto de equilíbrio com diferentes amplitudes e a órbita com menor variação é com o valor inicial da excentricidade de 0,06. Mas por causa da inclusão da perturbação do Sol, aumentou a amplitude de variação dos elementos orbitais. Na Figura 25, modificou-se apenas o semieixo maior ( $a = 3200$  km) em relação a Figura 24.

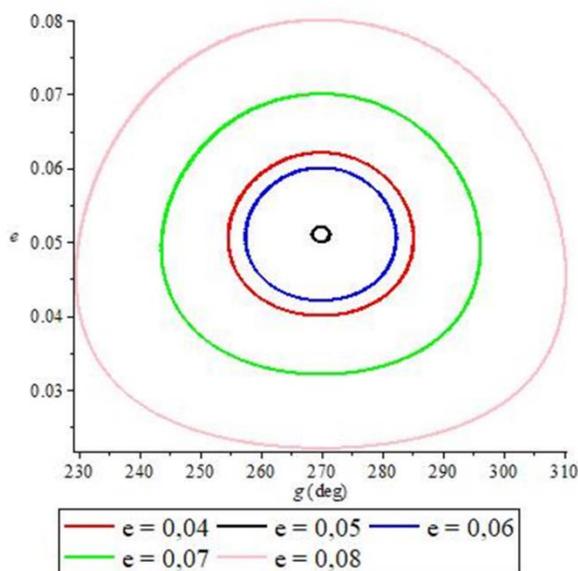


Figura 25 - Excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ).

A Figura 25 mostra que, diferentemente da Figura 24, com o aumento do semieixo maior de 2700 km para 3200 km, a órbita que menos variou, como podemos ver na Figura 25, é com excentricidade  $e=0,05$ . Que é o tipo de trajetória quase congelada (ver, por exemplo, CARVALHO ET AL., 2010).

Na Figura 26, considerou-se as seguintes condições iniciais:  $a = 3300$  km,  $g = 270^\circ$ ,  $h = 90^\circ$ ,  $i = 90^\circ$  e o tempo de integração de 50 anos. Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + C_{22} + R_{2MS}$ .

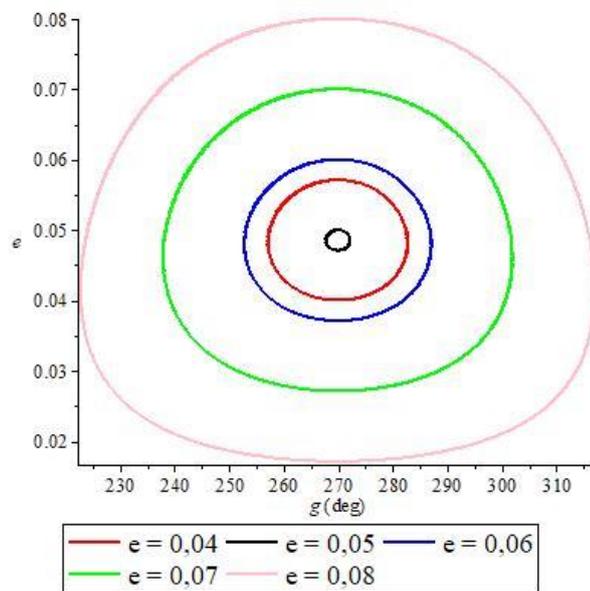


Figura 26 - Excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ).

A Figura 26 mostra que, aumentando o valor do semieixo maior, a órbita com menor variação da excentricidade ( $e=0,05$ ) aumentou um pouco a amplitude de variação em relação ao mostrado na Figura 25.

Na Figura 27, considerou-se as seguintes condições iniciais:  $a = 3400$  km,  $g = 270^\circ$ ,  $h = 90^\circ$ ,  $i = 90^\circ$  e o tempo de integração de 50 anos. Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + C_{22} + R_{2MS}$ .

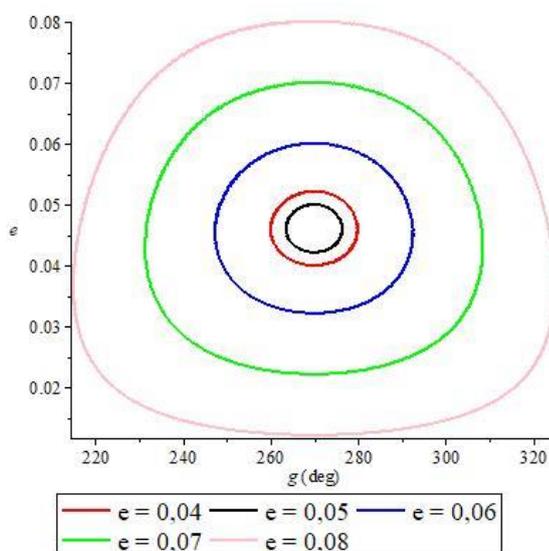


Figura 27 - Excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ).

A Figura 27 mostra que algumas órbitas aumentaram a amplitude de variação em relação ao mostrado nas Figuras 25 e 26 quando aumentamos o semieixo maior e mesmo assim, a excentricidade  $e = 0,05$  continua sendo a órbita mais estável. A região em torno de  $a=3200$  km mostrou-se mais estável, em que a órbita apresenta uma menor variação.

Na Figura 28, considerou-se as seguintes condições iniciais:  $a = 3500$  km,  $g = 270^\circ$ ,  $h = 90^\circ$ ,  $i = 90^\circ$  e o tempo de integração de 50 anos. Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + C_{22} + R_{2Ms}$ .

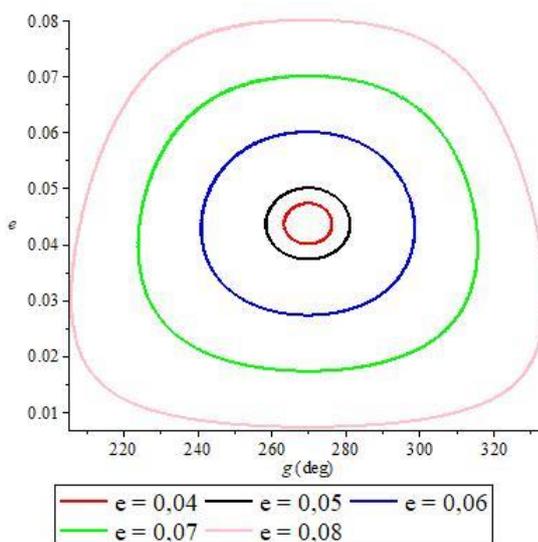


Figura 28 - Excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ).

A Figura 28 mostra que para o semieixo maior de 3500 km, a excentricidade  $e = 0,04$  é a que possui a menor variação, mas no geral as amplitudes de variação são muito próximas da mostrada na Figura 27.

Na Figura 29, considerou-se as seguintes condições iniciais:  $a = 3700$  km,  $g = 270^\circ$ ,  $h = 90^\circ$ ,  $i = 90^\circ$  e o tempo de integração de 50 anos. Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + C_{22} + R_{2MS}$ .

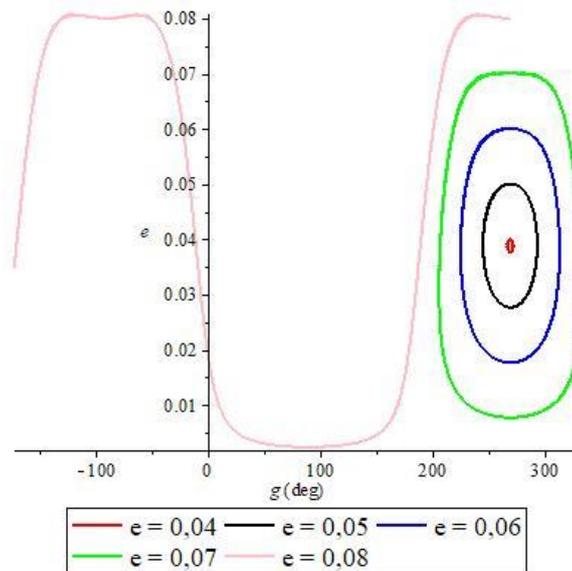


Figura 29 - Excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ).

A Figura 29 mostra que para o semieixo maior de 3700 km, a órbita com excentricidade  $e = 0,08$  que antes librava em torno do ponto de equilíbrio com grande amplitude, agora está oscilando, o argumento do pericentro está precessionando para este valor inicial da excentricidade. Note que a órbita com  $e = 0,04$  está congelada, ou seja, com menor amplitude de variação.

Nas Figuras 30 a 33 é incluído o efeito da pressão de radiação solar juntamente com o valor de Beta ( $\beta$ ) e a relação área/massa ( $A/m$ ). Na Figura 30, considerou-se as seguintes condições iniciais:  $a = 4000$  km,  $e = 0,02$ ,  $g = 270^\circ$ ,  $h = 90^\circ$ ,  $i = 90^\circ$  e o tempo de integração de 50 anos. Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + C_{22} + R_{2MS} + PRS$ .

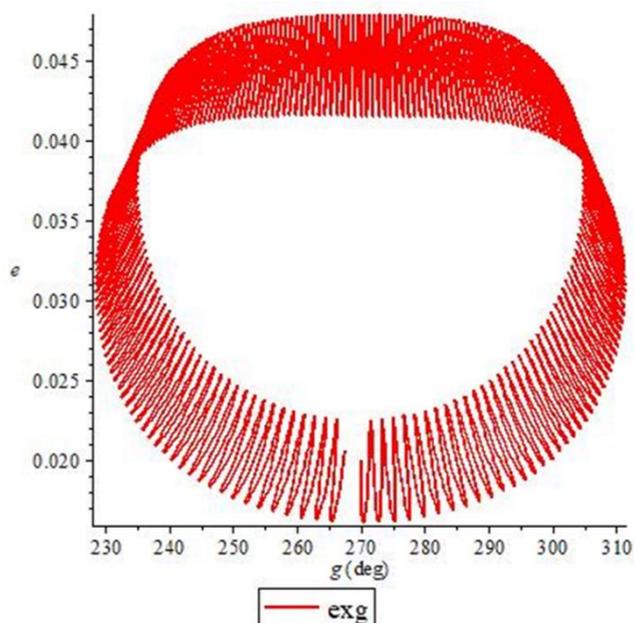


Figura 30 - Excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ).  $\beta = 0,0001$  e  $A/m = 9,746588694 \times 10^{-6}$ .

A Figura 30 mostra que a excentricidade  $e = 0,02$  com um valor baixo de Beta e pequena área/massa, a variação da excentricidade é muito pequena (0,02 a 0,047) sendo uma órbita quase congelada, órbita ideal para o satélite se manter por mais tempo em órbita sem colidir com o planeta.

Na Figura 31, considerou-se as seguintes condições iniciais:  $a = 4000$  km,  $e = 0,07$ ,  $g = 270^\circ$ ,  $h = 90^\circ$ ,  $i = 90^\circ$  e o tempo de integração de 50 anos. Potencial perturbador:  $J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + C_{22} + R_{2MS} + PRS$ .

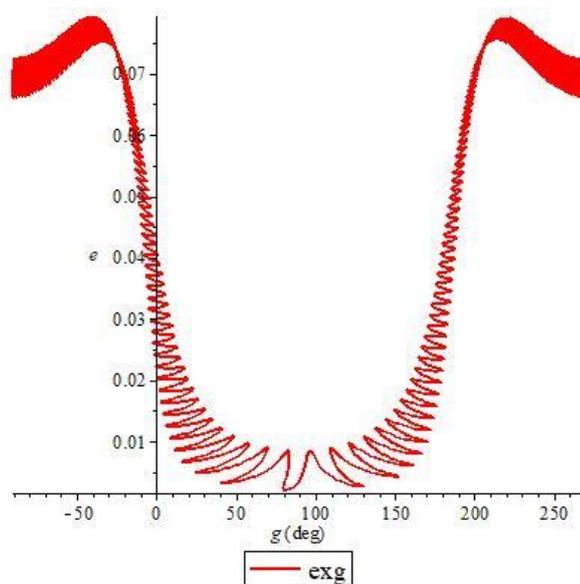


Figura 31 - Excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ).  $\beta = 0,0001$  e  $A/m = 9,746588694 \times 10^{-6}$ .

A Figura 31 mostra que, aumentando apenas o valor da excentricidade inicial em relação a Figura 30, a órbita varia consideravelmente os seus elementos orbitais, não sendo ideal para o satélite orbitar em torno de Mercúrio.

Na Figura 32, alterando a excentricidade ( $e = 0,08$ ), o valor de Beta ( $\beta = 0,001$ ) e também a razão área/massa ( $A/m = 9,746588694 \times 10^{-5}$ ) em relação a Figura 30.

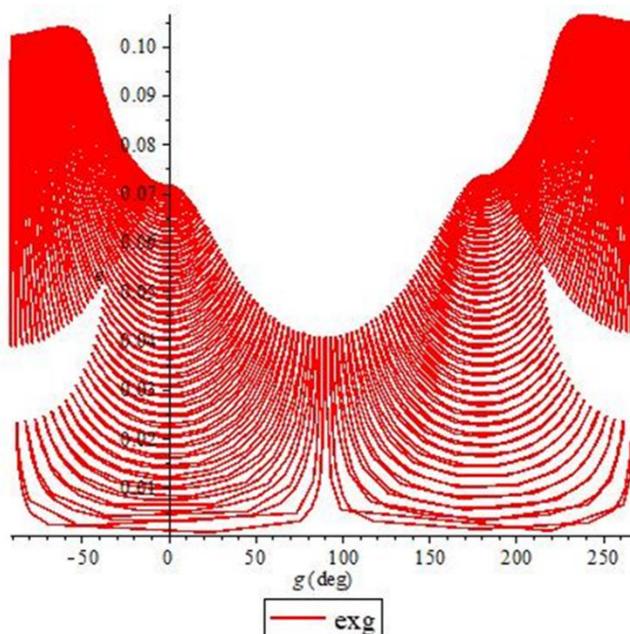


Figura 32 - Excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ).  $\beta = 0,001$  e  $A/m = 9,746588694 \times 10^{-5}$ .

A Figura 32 mostra que a variação dos elementos orbitais é alta ao longo do tempo, portanto não possui condições ideais para o satélite orbitar Mercúrio. Neste caso, o argumento do pericentro está precessionando. Na Figura 33, apenas o semieixo maior ( $a = 4600$  km) foi alterado em relação a Figura 30.

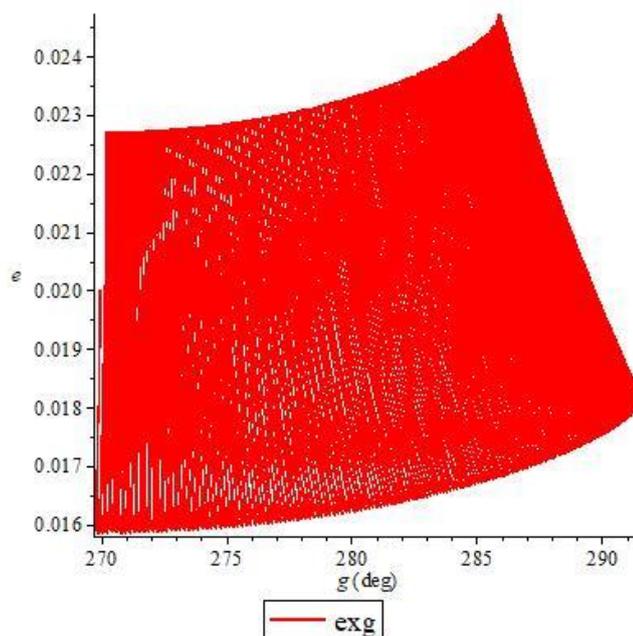


Figura 33 - Excentricidade ( $e$ ) x argumento do pericentro ( $g$ ).  $\beta = 0,0001$  e  $A/m = 9,746588694 \times 10^{-6}$ .

A Figura 33 mostra a menor variação entre os elementos orbitais ao longo do tempo dentre todos os resultados mostrados nas Figuras de 30, 31 e 32, portanto, são as condições iniciais onde se encontra uma órbita quase congelada, ou seja, um maior tempo de permanência em órbita do satélite. Esse resultado é melhor do que os apresentados nas Figuras 25 e 29 por exemplo, pelo fato da excentricidade inicial ser menor e por ter todas as perturbações incluídas no potencial perturbador.

## 5. CONCLUSÕES

No presente trabalho, consideramos a dinâmica de um satélite artificial em torno do planeta Mercúrio, levando em conta as principais perturbações orbitais, a saber, a não esfericidade do planeta, a perturbação do terceiro corpo e a pressão de radiação solar. Realizamos simulações numéricas usando o Software Maple, primeiro considerando somente a perturbação devido a distribuição não uniforme de massa do planeta ( $J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + J_6 + C_{22}$ ), logo em seguida implementando a perturbação do terceiro corpo e, por fim, incluímos a pressão de radiação solar. Considerando somente a não esfericidade de Mercúrio, os elementos orbitais (excentricidade e argumento do pericentro) se mantem estáveis ao longo do tempo. Com a inclusão da perturbação do terceiro corpo, as órbitas de alta altitude mostraram alta variação nos elementos orbitais ao longo do tempo.

Para órbitas com excentricidade maior que 0,1 o tempo de permanência em órbita é menor que 10 anos (Figura 17). Mas para órbitas com excentricidade igual ou menor do que 0,1 encontramos órbitas com maior tempo de vida. Agora, para órbitas de baixa altitude, os valores de excentricidade que contribuíram para manter a órbita com maior tempo de vida são  $e=0,04$  (Figuras 28 e 29),  $e=0,05$  (Figuras 25, 26 e 27) e  $e=0,06$  (Figura 24). Agora, incluindo a pressão de radiação solar, ou seja, com todas as perturbações consideradas, é mostrado que o efeito da PRS amplificou o crescimento da excentricidade para valores de beta maiores que 0,0001 (Figuras 18, 19 e 20) para órbitas de alta altitude e (Figura 32) para órbitas de baixa altitude, fazendo com que o satélite MMO colida rapidamente com o planeta Mercúrio. Com isso, das nossas análises, concluímos que, em geral, as Velas Solares não contribuíram para encontrar órbitas congeladas com grandes valores de  $A/m$ . Notamos que com uma busca criteriosa é possível encontrar regiões do espaço em torno de Mercúrio em que algumas condições iniciais específicas permitem obter uma órbita quase congelada em torno de Mercúrio.

Vale destacar que a pressão de radiação solar é a perturbação mais relevante sobre uma vela solar e que pode ser usada para amplificar o crescimento da excentricidade, o que é uma técnica eficaz para remover detritos espaciais, ver por exemplo, Lima (2019). Com o aumento no valor da taxa  $A/m$ , a excentricidade ( $e$ ) e o

argumento do pericentro ( $g$ ) libraram cada vez mais com maior amplitude em torno do ponto de equilíbrio, se tornando cada vez mais instáveis. As Velas Solares são importantes na exploração espacial por diminuírem os custos nos combustíveis para realizar correções de órbitas e pela sustentabilidade utilizando a energia solar, uma energia limpa e renovável. Na continuidade deste trabalho, pretendemos explorar mais o modelo de pressão de radiação solar, tanto para satélites em órbita de Mercúrio, mas também para estudos relacionados a mitigação do lixo espacial.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] AORPIMAI M, PALMER PL, Analysis of frozen conditions and optimal frozen orbit insertion, *J. Guid. Control Dynam.* 26, 786-793 (2003). <https://doi.org/10.2514/2.5113>.
- [2] CARBONE, A., CINELLI, M., CIRCI, C., ORTONE, E. Observing Mercury by a quase-propellantless mission. **Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy**. Springer, v. 132, p. 8, 2020. <https://doi.org/10.1007/s10569-020-9950-0>.
- [3] CARVALHO, J. P. S., VILHENA DE MORAES, R. Prado, A. F. B. A. **Some Orbital Characteristics of Lunar Artificial Satellites**, *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, 108: 371-388, 2010.
- [4] CARVALHO, J. P. S. **Perturbação orbital devida a um terceiro corpo com distribuição não uniforme de massa e em órbita elíptica**. 2011. 215 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2011.
- [5] CARVALHO, J. P. S., TRESACO, E., MORAES R. V., PRADO A. F. B. A. Perturbações orbitais sobre uma vela solar. In: **XXXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC2016**, Gramado-RS. Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics, p. 1-7, 2016.
- [6] CARVALHO, J. P. S.. Analysis of the long and short-period terms due the nonsphericity of the central body: applications for Mercury. **XVIII Brazilian Colloquium on Orbital Dynamics**. *JOURNAL OF PHYSICS. CONFERENCE SERIES*, v. 911, p. 012011-6, 2017.
- [7] COFFEY S. L., DEPRIT A, DEPRIT E, Frozen orbits for satellites close to an Earth-like planet, **Celest. Mech. Dyn. Astr.** 59, 37-72 (1994). <https://doi.org/10.1007/BF00691970>.
- [8] COSTA, Maria Lívia Galhego Thibes Xavier. **Uma Abordagem de Otimização para a Busca de Inclinações Quase-Críticas e Quase-Heliossíncronas**. São José dos Campos: INPE, 2020. 206 p. Dissertação (Mestrado) - Pós-Graduação em Engenharia e Tecnologia Espaciais/Mecânica Espacial e Controle, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2020.
- [9] CUBILLOS, X. C. M. **Velas solares – O futuro da exploração do espaço**. *Ângulo* 129, abr./jun., 2012. p. 62-68.
- [10] DEIENNO, R. et al. Satellite de-orbiting via controlled solar radiation pressure. **Celeste Mech Dyn Astr.** v. 126: p. 433-359, 2016, doi:10.1007/s10569-016-9699-7.
- [11] ELIPE A, LARA M, Frozen orbits about the Moon, *J. Guid Control Dynam.* 26, 238-243 (2003). <https://doi.org/10.2514/2.5064>.

- [12] FERRAZ-MELLO, S.: Sur le problème de la pression de radiation dans la théorie des Satellites Artificiels. **C. R. Acad. Sci. Paris** 258, 463 (1964).
- [13] GARNER, C.E. et al., "A Summary of Solar Sail Technology Developments and Proposed demonstration Missions". **AIAA-99-2697, 35<sup>th</sup> AIAA Joint Propulsion Conference**, June 20-24, 1999. JPC-99-2697.
- [14] GONG, S. and MACDONALD, M. "Review on solar sail technology". **Astrodynamics** Vol. 3, No. 2, 93-125, 2019. <https://doi.org/10.1007/s42064-019-0038-x>.
- [15] KHATTAB, E. H., RADWAN, M., RAHOMA, W. A. Frozen Orbits Construction for a Lunar Solar Sail. **J. Astron. Space Sci.** 37(1), P. 1-9. 2020.
- [16] KOZAI, Y.: Effects of solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite. *Smithson.* **Astrophys. Obs.** 56, 25–34 (1961b).
- [17] KOZAI, Y.: The Earth's gravitational potential derived from the motion of Satellite 1958  $\beta$ 2. *Smithson.* **Astrophys. Obs.** 22, 1–6 (1959).
- [18] KRIVOV, A.V., GETINO, J.: Orbital evolution of high-altitude balloon satellites. **Astron. Astrophys.** 318, 308–314 (1997)
- [19] LARA M, DEPRIT A, ELIPE A, Numerical continuation of families of frozen orbits in the zonal problem of artificial satellite theory, **Celest. Mech. Dynam. Astr.** 62, 167-181 (1995). <https://doi.org/10.1007/BF00692085>.
- [20] LEIPOLD, M., GARNER, C.E., FREELAND, R., HERRMANN, A., Noca, M., PAGEL, G., SEBOLDT, W., SPRAGUE, G., UNCKENBOLD, W., "ODISSEE - A Proposal for Demonstration of a Solar Sail in Earth Orbit." **Acta Astronautica** Vol. 45, N<sup>o</sup> 4-9, pp. 557-566, 1999. ©1999 Published by Elsevier Science Ltd. All rights reserved.
- [21] LIMA, Jackson dos Santos. **Simulação do uso da Vela Solar e das Perturbações Orbitais Naturais para Remoção de Detritos Espaciais**. Feira de Santana - Universidade Federal do Recôncavo da Bahia (UFRB). Graduação no Bacharelado Interdisciplinar em Energia e Sustentabilidade. Feira de Santana. p. 60. 2019.
- [22] LUCKING C., COLOMBO C., MCINNES C.: Solar radiation pressure augmented deorbiting from high altitude Sun-synchronous orbits, In: **4S Symposium 2012**, Small Satellites System and Services (2012).
- [23] MACDONALD, M. and MCINNES, C.R., 2010. "Solar Sail Mission Applications and Future Advancement". In: **2nd International Symposium on Solar Sailing**, ISSS 2010, 20-22 July 2010, New York, USA.
- [24] MASOUD A, RAHOMA WA, KHATTAB EH, EL-SALAM FA, Construction of frozen orbits using continuous thrust control theories considering earth oblateness

and solar radiation pressure perturbations, **J. Astronaut. Sci.** 65, 448-469 (2018). [https:// doi.org/10.1007/s40295-018-0135-y](https://doi.org/10.1007/s40295-018-0135-y).

[25] MASOUD A, RAHOMA WA, KHATTAB EH, EL-SALAM FA, Design of artificial sun-synchronous orbits with main zonal harmonics and solar radiation pressure using continuous low-thrust control strategies, **Open Astron. J.** 28, 124-130 (2019). [https:// doi.org/10.1515/astro-2019-0012](https://doi.org/10.1515/astro-2019-0012).

[26] MATIAS, B. ALENCAR, L. Curso básico de Maple 13. PET CIVIL UFC, 2011. p. 36. Disponível em: <https://petcivil.ufc.br/portal/wp-content/uploads/2012/04/Maple-by-L%C3%ADvia-and-Bergson.pdf>. Acesso em: 18 jun. 2020.

[27] MAZARICO, E., GENOVA, A., GOOSSENS, S., LEMOINE, F. G., NEUMANN, G. A., ZUBER, M. T., SMITH, D. E., and SOLOMON, S. C. (2014), The gravity field, orientation, and ephemeris of Mercury from MESSENGER observations after three years in orbit, **J. Geophys. Res. Planets**, 119, 2417–2436, doi:10.1002/2014JE004675.

[28] MCINNES, C. R., Solar Sailing: Technology, Dynamics and Mission Applications, **Springer-Praxis Series in Space Science and Technology**, Springer-Verlag, pp. 296, 1999.

[29] MUSEN, P., Bryant, R., Bailie, A.: Perturbations in perigee height of Vanguard I. **Science** 131, 935–936 (1960).

[30] NASA. **Messenger**. Disponível em: <<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraft/display.action?id=2004-030A>>. Acesso em: 24 jan. 2019.

[31] NASA. **BepiColombo**. Disponível em: <<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraft/display.action?id=BEPICLMBO>>. Acesso em: 24 jan. 2019.

[32] NASA. **Mariner 10**. Disponível em: <<https://nssdc.gsfc.nasa.gov/nmc/spacecraft/display.action?id=1973-085A>>. Acesso em: 24 jan. 2019.

[33] RODRIGUES, C.V. Capítulo 3 – O Sistema Solar. **Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais**. São José dos Campos, 2003.\*

[34] ROSBOROUGH GW, OCAMPO CA, Influence of higher degree zonals on the frozen orbit geometry, **Proceedings of the AAS/AIAA Astrodynamics Conference**, Durango, CO, 19-22 Aug 1991.

[35] SANTOS J. C., de MORAES R. V., CARVALHO J. P. S., Stability of frozen orbits around Europa, in American Astronomical Society, DDA meeting #44, id.204.12, May 2013.

- [36] SIMO, J. and MCINNES, C.R., 2010. "Displaced Solar Sail Orbits: Dynamics and Applications." In: **20th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting**, 14-17 Feb 2010, San Diego, California.
- [37] TRESACO, E.; ELIPE, A.; CARVALHO, J. P. S. Frozen orbits for a solar sail around mercury. ***Journal of Guidance, Control, and Dynamics***, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 39, n. 7, p. 1659–1666, 2016.
- [38] TRESACO, E. et al. Averaged model to study long-term dynamics of a probe about mercury. ***Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy***, Springer, v. 130, n. 2, p. 9, 2018.
- [39] VERMA, A. K. and MARGOT, J.-L. Mercury's gravity, tides, and spin from MESSENGER radio science data, ***J. Geophys. Res. Planets***, 121, 1627–1640, 2016, doi:10.1002/2016JE005037.
- [40] ZHIGANG W, JIANG F, Li J, Artificial Martian frozen orbits and Sunynchronous orbits using continuous low-thrust control, ***Astrophys. Space Sci.*** 352, 503-514, (2014). <https://doi.org/10.1007/s10509-014-1962-3>.