



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO BAHIA**

**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS**

**BACHARELADO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS**

**ANÁLISE DE SEÇÃO RETANGULAR SUJEITA A  
FLEXÃO COMPOSTA RETA**

**ANDRÉ OLIVEIRA CUNHA COSTA**

**CRUZ DAS ALMAS, 2016**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO BAHIA**

**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS**

**BACHARELADO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS**

**ANÁLISE DE SEÇÃO RETANGULAR SUJEITA A  
FLEXÃO COMPOSTA RETA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia como  
parte dos requisitos para obtenção do grau de  
**Bacharel em Ciências Exatas e Tecnológicas.**

Orientador: Prof. Dr. Carlos Frederico Macêdo Cortês

ANDRÉ OLIVEIRA CUNHA COSTA

CRUZ DAS ALMAS, 2016



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO BAHIA**

**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS**

**BACHARELADO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS**

**ANÁLISE DE SEÇÃO RETANGULAR SUJEITA A  
FLEXÃO COMPOSTA RETA**

Aprovada em: 17/02/2016

---

Prof. Dr. Carlos Frederico Macedo Cortês  
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

---

Prof. MSc. Hélio Guimarães Aragão  
Universidade Federal do Recôncavo da Bahia

---

Prof. MSc. Mailson Castelão de Carvalho  
Faculdade de Tecnologia e Ciências

**PROF. DR. CARLOS FREDERICO MACÊDO CORTÊS**  
**ANDRÉ OLIVEIRA CUNHA COSTA**

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Delma Janete e Fábio, pelo amor incondicional, pelo carinho, pela dedicação, pelo investimento na minha educação e por sempre ter confiado no meu potencial.

Aos meus tios, Telma e Raimundo, que me ajudaram muito no crescimento da minha personalidade e me acolheram de braços abertos nos momentos de necessidade.

À minha prima Emanuella Mendes, pelo carinho e pelo companheirismo ao longo desses anos.

À minha avó Raulinda, minha irmã Ana Victoria, à minha tia Poliana, meu primo Murilo e todos meus familiares que contribuíram direta ou indiretamente para que esse sonho fosse realizado.

Ao professor Carlos Cortês, pela orientação e pelo incentivo no desenvolvimento desse trabalho.

Ao meu amigo Eduardo Leite, pela amizade sincera por todo esse período de graduação.

À minha namorada Maria Clara, pela paciência e compreensão nos momentos difíceis.

Aos meus colegas de curso: Gabriela, Patrícia, Aline, Dijane, Julio, Álvaro e todos os que não citei que me ajudaram a chegar até aqui.

A todos os meus professores, aos quais devo todos os conhecimentos adquiridos até hoje.

“Nada lhe pertence mais que os seus sonhos”

Friedrich Wilhelm Nietzsche



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO BAHIA**

**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS**

**BACHARELADO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS**

## **RESUMO**

Em qualquer problema para determinação de esforços em estruturas, uma boa análise oferece informações necessárias para se realizar um correto dimensionamento. Ao observar o comportamento de vários elementos lineares sujeitos a uma determinada solicitação externa, pode-se perceber que, em diversas situações, esses elementos estão solicitados simultaneamente pela ação de momentos fletores e esforços normais. Na análise de estruturas, conceitos físicos fundamentais como equilíbrio de forças e equilíbrio de momentos na seção transversal são aplicados de forma a trazer conclusões relevantes e práticas. A partir do conceito físico de flexão de elementos rígidos pode ser realizada a análise da seção retangular de um elemento estrutural sendo conhecido apenas sua geometria. Este trabalho apresenta a implementação de código computacional utilizando o programa EXCEL para que se possa obter o par  $M \times N$ , que representariam os esforços que uma seção retangular poderia suportar. Como resultado, será possível, realizar o dimensionamento dos elementos estruturais de forma rápida, para estrutura que se encaixe nas condições particulares apresentadas.

Palavras-chave: análise de estruturas, concreto armado, flexão composta reta, seção retangular, dimensionamento.



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO BAHIA**

**CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS**

**BACHARELADO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS**

## **ABSTRACT**

In any problem for structure determination efforts, a good analysis provides necessary information to perform a correct sizing. By observing the behavior of several linear elements subject to certain outdoor request, it can be seen that, in many situations, these elements are requested simultaneously by the action of bending moments and normal forces. In structural analysis, fundamental physical concepts, such as balance of forces and balance of moments in cross section are applied in order to bring relevant and practical conclusions. From the physical concept from the bending rigid elements, can be provide, the analysis of rectangular section of a structural element, since only known its geometry. This finish graduate course work presents the implementation of computational code using MS-EXCEL to determinate the pair  $M \times N$ , which represent the resistance of a rectangular section. . Finally, it will be possible to calculate structural elements quickly, since that will be adjust in the particular conditions.

**Keywords:** structural analysis, reinforced concrete, axial force and moment bending, rectangular section, design.

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	11
3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
3.1 Estado Limite Último sob Solicitações Normais: Princípios Gerais de Cálculo. ....	16
3.1.1 Considerações Gerais .....	16
3.1.2 Solicitações Normais .....	17
3.2 Base de Cálculo .....	17
3.2.1 Caracterização do estado limite último .....	17
3.2.2 Compatibilidade de deformações. ....	20
3.2.3 Diagrama de tensão-deformação do concreto.....	20
3.2.4 Diagrama de tensão-deformação do aço .....	22
3.2.5 Equações de equilíbrio e compatibilidade .....	23
3.3 Seções Retangulares de Concreto Armado .....	26
3.3.1 Flexão simples e flexão composta com grande excentricidade (Domínios 2-3-4-4a).....	26
3.3.2 Condições de equilíbrio.....	27
3.3.3 Propriedades básicas das seções retangulares .....	28
4. APLICAÇÕES E RESULTADOS	30
4.1 Configurações de Armadura .....	30
4.2 Gráficos Gerados .....	32
5. CONCLUSÃO	40
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	42

## 1. INTRODUÇÃO

Com a alta competitividade no mercado, há uma necessidade cada vez maior em se conseguir diminuir os custos de construção. Para isso, é indispensável um bom dimensionamento, no qual se consiga uma correlação entre a economia de materiais, ao reduzir as dimensões dos elementos estruturais, de forma a melhor utilizar suas propriedades resistentes.

O dimensionamento de estruturas de concreto armado é um processo que visa obter o detalhamento de uma seção cujos esforços resistentes sejam capazes de suportar os esforços atuantes, sendo cumpridos os requisitos de segurança e desempenho previstos de acordo com as normas vigentes.

Como o requisito principal é atingir determinados valores de resistência, deformação, etc., existem infinitos modelos estruturais que consigam alcançar tais requisitos. Dessa forma, além de sensibilidade do projetista, se faz necessária uma ferramenta que se possa repetir os cálculos de maneira rápida, para que este possa escolher o melhor modelo, analisando os resultados e moldando assim a estrutura de modo a obter a mais viável.

Nesse trabalho será apresentada uma análise de diferentes distribuições de armadura e seu comportamento diante das variações da resistência a compressão característica do concreto ( $f_{ck}$ ) e da taxa de armadura ( $\rho$ ).

O referencial teórico, com os trabalhos desenvolvidos na área de dimensionamento de estruturas que utilizam do mesmo conceito utilizado na construção deste estudo, citando métodos, objetivos e resultados pode ser encontrado no capítulo 2 deste trabalho.

No capítulo 3 está toda a fundamentação teórica utilizada para a construção do trabalho, fazendo as definições e considerações utilizadas para a construção da análise, utilizando os métodos embasados na literatura e na norma brasileira de concreto NBR 6118:2014 (Projeto de estruturas de concreto – Procedimento).

No capítulo 4 são realizadas as análises estruturais de diferentes distribuições de armadura, estudando as variações de características geométricas da seção, variação do  $f_{ck}$  e da taxa de armadura.

Finalmente, no capítulo 5, estão as conclusões chegadas nesse estudo, a análise dos dados obtidos e sugestões de diferentes abordagens para trabalhos futuros.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Argolo (2000) apresentou em seu trabalho uma formulação para o dimensionamento ótimo de seções retangulares de concreto armado à flexo-compressão reta, utilizando algoritmos genéticos.

Ao decorrer do estudo foram discutidas as potencialidades dos algoritmos genéticos, sendo descritos como vantajosos em comparação aos algoritmos com programação matemática e aos métodos convencionais, como por exemplo, ábacos de iteração.

Na tentativa de gerar um dimensionamento ótimo de uma seção de concreto armado, foram utilizadas as análises computadorizadas através do algoritmo, de sucessivas seções de concreto, não por tentativa e erro, mas por seleção de características favoráveis. Tendo como base os critérios básicos estabelecidos na NBR 6118:1980.

Na visão do autor um projeto estrutural ótimo estaria relacionado com a escolha dos materiais, a topologia e geometria a serem utilizados no sistema, e o dimensionamento se suas partes constituintes, que envolve atender requisitos de desempenho economia e segurança. Deste modo, o método concentrou-se na determinação de uma combinação conveniente obtida através de várias análises visando a concepção ou determinação de uma estrutura de melhor desempenho global dentro dos objetivos estabelecidos.

Para solucionar seu problema de otimização e construir seu algoritmo, o autor utilizou a análise da seção retangular de concreto armado sujeita a flexo-compressão reta, ou seja, para a otimização utilizada se fazem necessárias as formulações básicas obtidas através da análise para que possam ser geradas as relações entre as variáveis e os requisitos necessários estabelecidos na NBR 6118:2014.

Ao final de seu estudo, o autor concluiu que o dimensionamento convencional, com ábacos de iteração, não é indicado quando se visa a economia do

projeto, já que o dimensionamento ótimo elimina o processo de tentativa e erro na obtenção da seção de menor custo.

Bastos (2004), por sua vez, desenvolveu um programa para cálculo otimizado de seções retangulares de concreto armado submetidas a esforços de flexo-compressão oblíqua. O programa utilizou a técnica de algoritmos genéticos.

No seu trabalho, ele dissertou que o dimensionamento convencional de estruturas de concreto armado visa obter simplesmente um detalhamento de uma seção, cujos esforços resistentes sejam capazes de suportar com a devida segurança os esforços atuantes, e que, ao mesmo tempo, satisfaça aos requisitos e prescrições de norma.

Dessa forma para um mesmo carregamento atuante, existem diversas configurações possíveis que satisfazem a tais requisitos. Por conseguinte, muitas soluções são consideradas aceitáveis, e assim como Argolo (2000), foram utilizados os algoritmos genéticos para tentar identificar quais configurações são mais aceitáveis com base na economia de material, já que o programa somente admite àquelas configurações que respeitem os limites da NBR 6118:1980.

O autor justificou seu trabalho com base na competitividade do mercado, visto que há uma necessidade cada vez maior de se diminuir os custos das construções. Assim sendo, se torna cada vez mais importante a obtenção de um detalhamento mais “enxuto” das seções de concreto, ou seja, onde o consumo de materiais seja o menor possível sem comprometer a segurança da estrutura.

Na utilização do seu método, o autor utilizou os requisitos estabelecidos pela NBR 6118:1980, como critérios de segurança para as estruturas a serem dimensionadas pelo seu algoritmo, que servem como limitação para as diferentes estruturas geradas.

A partir do desenvolvimento do programa, foram estudados exemplos comparativos entre o dimensionamento ótimo e o cálculo tradicional com emprego de ábacos de iteração. Os resultados também foram comparados com os que foram obtidos por diferentes técnicas de otimização. Também foi realizado um estudo de

sensibilidade, a fim de se avaliar a influência dos custos dos materiais no custo final da solução ótima.

Por fim, o autor concluiu que o método convencional utilizando ábacos de iteração não é indicado quando se deseja a solução mais econômica, uma vez que esse processo de cálculo só obtém a solução ótima eventualmente.

Foi destacado pelo autor que se comparado com outras técnicas de otimização, o algoritmo genético apresenta uma desvantagem com relação ao tempo de processamento, uma vez que há a necessidade de se processar um elevado número de avaliações das possíveis soluções do problema, porém essa desvantagem inexistente levanta em conta o poder de processamento das máquinas atuais.

Para a otimização de pontes construídas com longarinas, Cortês (2010) aplicou o método dos algoritmos genéticos, tendo como objetivo base a minimização do custo dos elementos da superestrutura de pontes em concreto armado e pretendido restringida por imposições da Norma Brasileira 6118:2003 (Projeto de Estruturas de Concreto – procedimento) quanto ao estado limite último e ao estado limite de serviço. O autor justificou a escolha do seu método baseando-se principalmente na facilidade de trabalhar com um grande número de variáveis que ele propicia, sejam elas discretas ou contínuas, além dele apresentar uma solução ótima muito próxima do ótimo global para problemas com grande número de restrições. Foi também justificada a escolha do método devido às limitações dos processos convencionais e aos resultados positivos obtidos em estudos anteriores na sua revisão da literatura.

Ao final de seu trabalho foram realizados alguns ensaios numéricos tendo como referência projetos de pontes que já foram executadas. Nos três exemplos testados se verificou que ocorreu a convergência do programa e na comparação foi analisado que a solução proposta pelo programa foi superior aos projetos já executados.

No estudo de Guerrante (2013) foi realizada uma análise e modelagem através do método dos elementos finitos, com o objetivo de prover mais informações sobre o comportamento estrutural e o dimensionamento desses elementos reforçados, a viga, o talão de reforço, e os chumbadores da ligação viga-reforço.

Foi destacado nesse trabalho o aumento exponencial dos custos de intervenção de uma estrutura ao longo do tempo, como sendo um fator a ser destacado em favor do dimensionamento correto dos reforços em uma determinada estrutura.

Foi dito como de interesse a adoção de sistemas de recuperação ou reforço que utilizem materiais e técnicas convencionais para se reduzir os gastos com essas intervenções.

Na necessidade de se projetar um reforço ou até mesmo estimar a capacidade resistente de um elemento danificado, foi dito que a quantidade de normas e outros materiais de consulta deixa muito a desejar, dessa forma é justificado o seu estudo nessa área com o objetivo de desenvolver técnicas que possibilitem maior praticidade na execução, aumento da capacidade resistente e de vida útil, além da redução do custo das estruturas.

Através de análise numérica, foi buscado um melhor entendimento do comportamento estrutural dos elementos estruturais reforçados pela técnica de encamisamento, através do método dos elementos finitos e a validação dos resultados computacionais por meio da comparação com resultados experimentais.

Em sua conclusão, Guerrante (2013) relatou que o modelo numérico dificilmente retrata, com perfeição, o comportamento real de uma estrutura. Foram consideradas aproximações para representar cada material, as interações entre eles e fenômenos a que estarão sujeitos, buscando sempre representar, o mais fielmente possível, o comportamento físico considerado relevante pelo engenheiro, e que cabe a este regular o nível de sofisticação de cada dimensionamento.

Alexandre (2014) tratou da utilização do método dos algoritmos genéticos no dimensionamento ótimo de vigas retangulares de concreto armado submetidas a esforços de flexão e cisalhamento. O autor justificou a escolha do método citando a flexibilidade no tratamento de restrições e a facilidade em lidar com variáveis discretas. A minimização do custo dos insumos (concreto, forma e aço) e da mão de obra foi utilizada como função objetivo, restringindo-se às recomendações da NBR 6118:2007 (Projeto de estruturas de concreto - Procedimento) quanto ao estado limite último e ao estado limite de serviço.

Ainda segundo o autor, no projeto convencional de estruturas de concreto armado, fez-se primeiramente o lançamento e a análise da estrutura, determinando os esforços atuantes e posteriormente realiza-se o dimensionamento e detalhamento de cada peça estrutural de modo que as especificações do projeto e os requisitos funcionais estabelecidos em norma sejam atendidos. Dessa forma, existem diversas soluções possíveis e custos diferentes para um mesmo problema.

O objetivo do seu trabalho está na minimização do custo, fornecendo como resultado os parâmetros para dimensionamento e detalhamento da viga em questão, de modo que, o algoritmo resulta um arquivo em texto e para facilitar a visualização foi criado um programa utilizando o AutoCAD para melhor representar a viga. Finalmente foi concluído que as soluções obtidas utilizando o algoritmo precisam de pouca ou nenhuma adaptação para execução.

### 3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

#### 3.1 Estado Limite Último sob Solicitações Normais: Princípios Gerais de Cálculo.

##### 3.1.1 Considerações Gerais

O estudo das seções de concreto armado tem por objetivo verificar que, sob a combinação mais desfavorável de ações, a peça não supera cada um dos estados limites, supondo que ambos materiais, concreto e aço tivessem como resistências reais as resistências minoradas.

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c}, \quad f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s}$$

(1)

Sendo:

- $f_{ck}$  = Resistência característica à compressão do concreto
- $\gamma_c$  = Coeficiente de minoração do concreto
- $f_{yk}$  = Limite elástico característico do aço
- $\gamma_s$  = Coeficiente de minoração do aço
- $f_{cd}$  = Resistência de cálculo de compressão do concreto
- $f_{yd}$  = Limite elástico do aço de cálculo

Conforme foi demonstrado por Montoya (2004), Uma seção de concreto armado submetida a solicitações normais pode alcançar o estado limite de ruptura mediante três formas diferentes: por excesso de deformação plástica do aço, pelo esmagamento do concreto em flexão e, finalmente, pelo esmagamento do concreto em compressão. As tensões que produzem a ruptura de uma seção não podem ser determinadas admitindo um comportamento elástico e linear para ambos materiais, concreto e aço.

### **3.1.2 Solicitações Normais**

De acordo com Fusco (1984), as solicitações normais podem ser definidas como sendo os esforços solicitantes que produzem tensões normais nas seções transversais das peças estruturais. As solicitações normais podem ser geradas pelo momento fletor e pela força normal.

De acordo com os princípios da Resistência dos Materiais, os esforços solicitantes são entes mecânicos referidos ao centro de gravidade da seção transversal. E de acordo com Fusco (1984), no dimensionamento das peças de concreto estrutural, armado ou protendido, os esforços solicitantes atuantes são calculados tomando-se, como polo de redução de esforços, o centro de gravidade da seção geométrica da peça, sem consideração da armadura.

## **3.2 Base de Cálculo**

Adaptando o que Fusco (1984), e Montoya (2004) estabelecem, pode se dizer que o estudo das seções de forma qualquer submetidas a solicitações normais, no estado limite último, é dizer que, no esgotamento da capacidade resistente por ruptura do concreto ou por deformação plástica excessiva do aço, se efetua de acordo com: a caracterização do estado limite último de esgotamento da capacidade resistente, compatibilidade de deformações, diagramas de tensão-deformação do concreto, diagrama de tensão-deformação do aço e condições de equilíbrio.

### **3.2.1 Caracterização do estado limite último**

Para caracterizar o estado limite último primeiramente define-se para esse estudo, a linha neutra como sendo a linha de um corpo deformado por flexão que separa a zona comprimida da zona tracionada conforme a Figura 3.1.

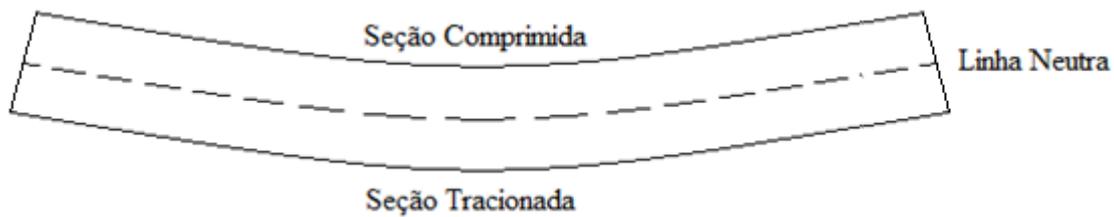


Figura 3.1 – Corpo deformado por Flexão.

O estado limite último é definido pela NBR 6118:2014 como sendo o estado-limite relacionado ao colapso, ou a qualquer outra forma de ruína estrutural, que determine a paralisação do uso da estrutura.

Existem uma série de situações de exaustão correspondentes às distintas solicitações normais que cobrem, de uma maneira contínua, desde a tração simples até a compressão centrada. Em cada uma dessas situações se conhecem as deformações em duas fibras da seção.

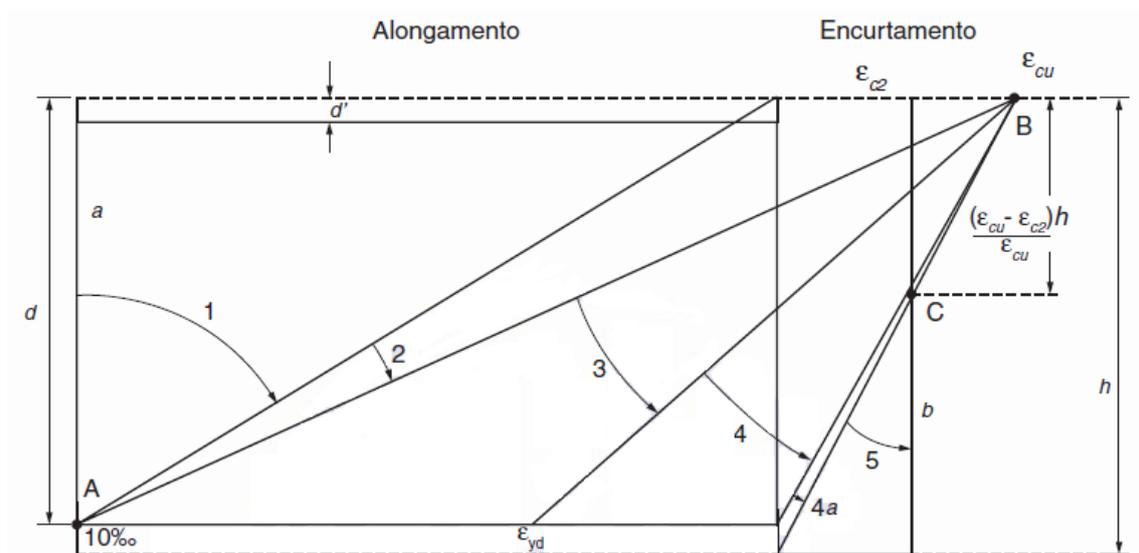


Figura 3.2 - Domínios de estado-limite último de uma seção transversal (ABNT, 2014).

A classificação dos domínios definida por Montoya (2004) considera somente os concretos por este considerados como de baixa resistência ( $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ). Porém a NBR 6118 (ABNT, 2014) utiliza uma abrangência dessa definição para concretos de alta resistência ( $f_{ck} > 50 \text{ MPa}$ ). Dessa forma, podem-se classificar os domínios como:

Domínio 1: tração simples ou composta onde, toda a seção está tracionada. As retas de deformação giram em torno do ponto A (primeira articulação) correspondente a um alargamento do aço de 10‰. Dessa forma o Domínio 1 abrange todos os valores entre  $x = -\infty$  e  $x = 0$ .

Domínio 2: Flexão simples ou composta onde o concreto não chega a ruptura. As retas de deformação continuam girando em torno da primeira articulação A na extremidade inferior da seção correspondente a um alongamento do aço mais tracionado de 10‰. A máxima deformação permitida ao concreto é dada por  $\varepsilon_{cu}$ . Esse domínio cobre o campo de profundidade da linha neutra compreendido entre  $x = 0$  e  $x = x_{23}$ .

Domínio 3: Flexão simples ou composta onde as retas de deformação articulam no ponto B (segunda articulação) correspondente ao encurtamento máximo do concreto  $\varepsilon_{cu}$ . O alargamento da armadura mais tracionada está compreendido entre 10 por 1.000 e  $\varepsilon_{yd}$ . Sendo  $\varepsilon_{yd}$  a deformação correspondente ao limite elástico do aço. Cobrindo assim o campo de profundidade da linha neutra compreendido entre  $x_{23}$  e  $x_{34}$ .

Domínio 4: Flexão simples ou composta onde as retas de deformação continuam girando ao redor do ponto B (segunda articulação). O alongamento da armadura mais tracionada está compreendido entre  $\varepsilon_{yd}$  e zero. Cobrindo assim o campo de profundidades da linha neutra compreendido entre  $x = x_{34}$  e  $x = d$ .

Domínio 4a: Flexão composta onde todas as armaduras estão comprimidas e existe uma pequena zona de concreto tracionado. As retas de deformação continuam girando em torno do ponto B (segunda articulação). Neste domínio se cobre o campo de profundidade da linha neutra compreendido entre  $x = d$  e  $x = h$ .

Domínio 5: Compressão simples ou composta onde ambos os materiais trabalham sob compressão. As retas de deformação giram em torno do ponto C (terceira articulação) definido pela interseção das retas mostradas na Figura 3.2 (na compressão simples a deformação de ruptura do concreto é calculada por  $\varepsilon_{c2}$ ). Neste

domínio se cobre o campo de profundidade da linha neutra compreendido entre  $x = h$  e  $x = +\infty$ .

### 3.2.2 Compatibilidade de deformações.

Sob a ação das solicitações, as armaduras têm a mesma deformação que o concreto que as envolve. Se admite a hipótese da Bernoulli que nos diz que as seções transversais após a deformação de flexão pura do corpo com eixo de simetria, se mantém planas e ortogonais ao eixo longitudinal deformado. Vale ressaltar que elementos que sofrem grandes influências de deformações por esforço cortante como vigas com menos de 2 metros de comprimento não pode se admitir a hipótese de Bernoulli.

Conhecendo as deformações em duas fibras da seção e assumindo que sua variação é linear, pode-se determinar as deformações em todas as fibras da seção.

### 3.2.3 Diagrama de tensão-deformação do concreto

É sabido que, conforme a tensão numa seção de concreto aumenta, a sua deformação acompanha esse aumento até um certo ponto onde a tensão não é mais admitida e o concreto se rompe, aumentando infinitamente sua deformação enquanto que a tensão aplicada converge para um valor.

Conseguindo então sucessivos valores dos pares de tensões e deformações é possível se construir o diagrama de tensão e deformação do concreto, de maneira que o valor de resistência a compressão máximo é o próprio  $f_{ck}$  do concreto, como mostra a Figura 3.3.

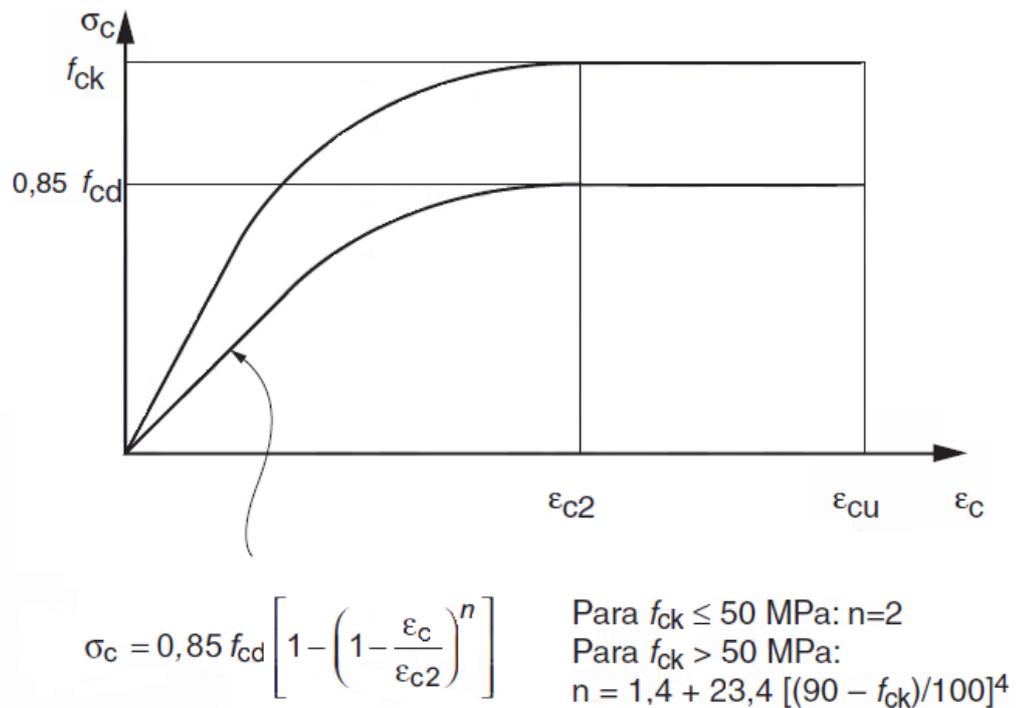


Figura 3.3 – Diagrama de tensão-deformação idealizado do concreto (ABNT, 2014).

Sabendo que:

- $\epsilon_{c2}$  = Deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico.
- $\epsilon_{cu}$  = Deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura.

Segundo a NBR 6118:2014 Os valores de  $\epsilon_{c2}$  e  $\epsilon_{cu}$  a serem adotados são obtidos de forma diferente para concretos de alta resistência em detrimento aos demais. De forma que:

- Para concretos de classes até C50:

$$\epsilon_{c2} = 2,0\text{‰};$$

$$\epsilon_{cu} = 3,5\text{‰};$$

- Para concretos de classes de C55 até C90:

$$\epsilon_{c2} = 2,0\text{‰} + 0,085\text{‰} \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53}; \quad (1)$$

$$\epsilon_{cu} = 2,6\text{‰} + 35\text{‰} \cdot [(90 - f_{ck})/100]^4; \quad (2)$$

Obtidos esses valores, pode ser relacionado para cada valor de deformação, um respectivo valor de tensão e vice-versa.

### 3.2.4 Diagrama de tensão-deformação do aço

A tensão em qualquer armadura se obtém a partir da deformação da fibra correspondente, através o diagrama tensão-deformação de cálculo do aço utilizado.

O diagrama dos aços utilizados no concreto armado depende do método de fabricação utilizado, tal diagrama deve ser fornecido pelo fabricante.

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), o diagrama de tensão e deformação do aço e os valores característicos da resistência do escoamento  $f_{yk}$ , da resistência a tração  $f_{stk}$  e da resistência a tração na ruptura  $\epsilon_{uk}$  devem ser obtidos em ensaios de tração realizados segundo a ABNT NBR ISO 6892-1. O valor de  $f_{yk}$  para os aços sem patamar de escoamento é o valor da tensão correspondente à deformação permanente de 0,2%.

Para o cálculo nos estados limites de serviço e último, pode-se utilizar o diagrama simplificado mostrado na Figura 3.4, para os aços com ou sem patamar de escoamento.

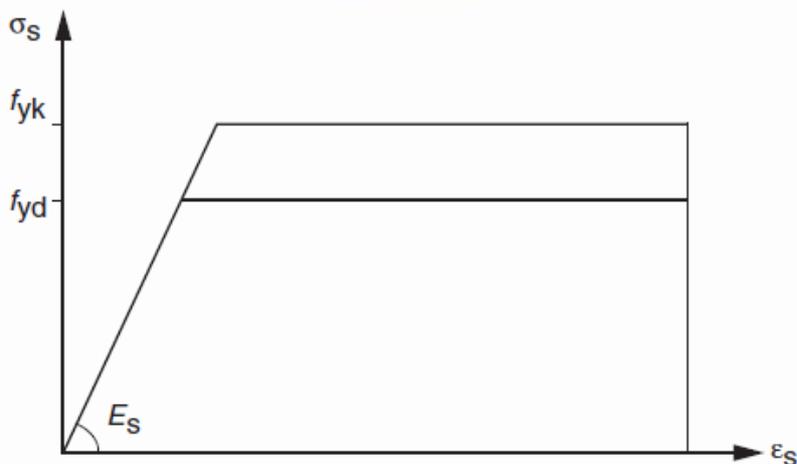


Figura 3.4 – Diagrama de tensão-deformação para aços de armaduras passivas (ABNT, 2014).

Ainda segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), este diagrama é considerado válido apenas para temperaturas dentro do intervalo entre -20 °C e 150 °C e pode ser aplicado tanto para tração quanto para compressão.

### 3.2.5 Equações de equilíbrio e compatibilidade

O estudo mais geral de uma seção de concreto armado, no estado limite último de esgotamento da capacidade resistente, deve referir-se a uma seção de forma qualquer submetida a solicitações normais e tangenciais, com uma distribuição arbitrária de armaduras.

No entanto, para estas equações a seguir se trata somente do caso de seções com um eixo de simetria, submetidas a solicitações normais que atuam sobre o referido eixo, e compostas por armaduras principais  $A_{s1}$  e  $A_{s2}$ .

Seja uma seção de forma qualquer, porém simétrica ao plano de flexão, submetida a tração simples ou composta, flexão simples ou composta, ou compressão simples ou composta, as equações de equilíbrio, no estado limite último de esgotamento capacidade resistente, podem ser expressas na forma:

$$N_u = \int_0^h b_y \cdot \sigma_y \cdot dy + A_{s1} \cdot \sigma_{s1} + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \quad (3)$$

$$N_u \cdot e_1 = \int_0^h b_y \cdot \sigma_y \cdot (d - y) dy + A_{s2} \cdot \sigma_{s2} \cdot (d - d_2) \quad (4)$$

Sendo:

- $N_u$  = Esforço Normal;
- $e_1$  = Excentricidade de  $N_u$  em relação a armadura  $A_{s1}$ ;
- $A_{s1}$  = Área da seção da armadura mais tracionada ou menos comprimida;
- $A_{s2}$  = Área da seção da armadura menos tracionada ou mais comprimida;
- $x$  = Distância da linha neutra à fibra mais comprimida ou menos tracionada;
- $d$  = Altura útil;
- $h$  = Altura total;
- $d_1$  = Distância do C.G. da armadura  $A_{s1}$  à fibra mais tracionada ou menos comprimida;

- $d_2$  = Distância do C.G. da armadura  $A_{s2}$  à fibra mais comprimida ou menos tracionada;  
 $y$  = Profundidade genérica;  
 $\sigma_y$  = Compressão do concreto na profundidade  $y$ ;  
 $\sigma_{s1}$  = Tensão da armadura  $A_{s1}$ ;  
 $\sigma_{s2}$  = Tensão da armadura  $A_{s2}$ ;

Com o objetivo de se obter equações de equilíbrio válidas para qualquer solicitação, sejam considerados tanto as tensões como os esforços com seu sinal implícito, atribuindo-lhes sinal positivo às trações e o sinal negativo às compressões. Os momentos são considerados positivos quando estão no sentido anti-horário. Portanto, as equações de compatibilidade de deformações podem ser descritas na forma:

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_y}{x - y} = \frac{\varepsilon_{s1}}{x - d} = \frac{\varepsilon_{s2}}{x - d_2} \quad (5)$$

Dessa maneira as deformações levam o sinal de acordo com o critério adotado. Uma vez que se possuem os diagramas de tensão-deformação do aço e do concreto, pode-se encontrar as tensões de acordo com as deformações encontradas.

- Limites de deformação na tração simples ou composta

Para valores de  $x \leq 0$ , as deformações correspondem ao domínio 1 com articulação no ponto A (Figura 3.2). Ambas as armaduras trabalham a tração, e a seção estará submetida a tração simples ou composta. A deformação da armadura mais tracionada será  $\varepsilon_{s1} = 0,010$ .

- Limites de deformação na flexão simples ou composta

Conforme Montoya (2004) descreve, para  $0 < x < h$ , as deformações correspondem aos domínios 2, 3, 4 e 4a, existirão alongamentos e encurtamentos, e a seção estará submetida a flexão simples ou composta. Os valores extremos de  $x$  que delimitam esses domínios se determinam facilmente mediante as equações de compatibilidade de deformações.

O máximo valor de  $x$  no domínio 2, o valor crítico, será:

$$x_{cri} = 0,259 \cdot d \quad (6)$$

No domínio 3, o valor da profundidade da linha neutra,  $x$ , varia no intervalo  $0,259 \cdot d \leq x \leq x_{lim}$ , sendo  $x_{lim}$  o valor limite a partir da qual a armadura  $A_{s1}$ , não alcança sua resistência de cálculo  $f_{yd}$ . A deformação da fibra mais comprimida do concreto é, neste domínio,  $\varepsilon_c = -0,0035$ . Temos, portanto:

$$\varepsilon_{s1} = 0,0035 \cdot \frac{d - x}{x} \quad (7)$$

Por outro lado, a deformação correspondente ao limite elástico é:

$$\varepsilon_{s1} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (8)$$

E o valor de  $x$ :

$$x_{lim} = \frac{d}{1,00 + 1,429 \cdot 10^{-3} \cdot f_{yd}} \quad (9)$$

Adotando-se  $E_s = 2 \cdot 10^5$  N/mm<sup>2</sup>, e expressando  $f_{yd}$  nas mesmas unidades.

No domínio 4, o valor da profundidade da linha neutra,  $x$ , varia no intervalo  $x_{lim} \leq x \leq d$  e as retas de deformação giram em torno da articulação B (Figura 3.2). A deformação da fibra mais comprimida do concreto é  $\varepsilon_c = -0,0035$  e a correspondente ao aço na tração,  $\varepsilon_{s1} < \varepsilon_y$  sendo  $\varepsilon_y$  a deformação correspondente ao limite elástico.

No domínio 4a, o valor da profundidade da linha neutra,  $x$ , varia no intervalo  $d < x < h$  e as retas de deformação giram em torno da articulação B (Figura 3.2). A deformação da fibra mais comprimida é  $\varepsilon_c = -0,0035$  e a armadura  $A_{s1}$  trabalha sob uma pequena compressão.

- Limites de deformação na compressão simples ou composta

Para  $h \leq x \leq +\infty$ , as deformações correspondem ao domínio 5 com articulação no ponto C (Figura 3.2). Ambas armaduras trabalham sob compressão, e

a seção estará submetida a compressão simples ou composta. As equações de compatibilidade de deformação são, neste caso:

$$\frac{0,002}{x - 3/7 \cdot h} = \frac{\varepsilon_{s1}}{x - d} = \frac{\varepsilon_{s2}}{x - d_2} \quad (10)$$

Desse modo, pode-se obter as deformações das armaduras.

### 3.3 Seções Retangulares de Concreto Armado

#### 3.3.1 Flexão simples e flexão composta com grande excentricidade (Domínios 2-3-4-4a).

Fusco (1984) define flexão simples como uma flexão não acompanhada de força normal. Por outro lado, define uma flexão com grande excentricidade e acompanhada de força normal, sendo que a peça tem um banzo comprimido e outro tracionado, como sendo flexão composta.

Considerando uma seção retangular genérica como mostrada na Figura 3.5, poderão ser aplicadas: as equações de equilíbrio, as propriedades básicas das seções retangulares e as equações adimensionais de equilíbrio e compatibilidade.

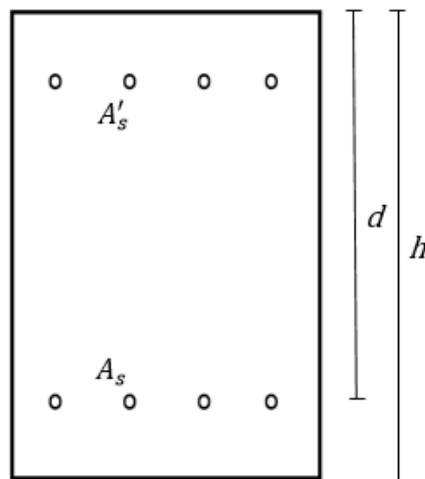


Figura 3.5 – Seção transversal de concreto armado.

Sendo:

$A_s$  = Área da seção transversal da armadura longitudinal de tração

$A'_s$  = Área da seção transversal da armadura longitudinal de compressão.

### 3.3.2 Condições de equilíbrio

Numa seção retangular de concreto armado, considerando uma seção com apenas duas camadas de armadura, pode-se utilizar o método da redução a um caso único em que se expressam os valores de  $M$  e  $N$  como absolutos, facilitando os cálculos para ser obtido o par resistente  $MxN$ .

- Flexo-tração

Para a flexo-tração, o equilíbrio de forças na seção transversal resulta:

$$F_u = R_s - R_c - R'_s \quad (11)$$

E o equilíbrio de momentos:

$$F_u e_s = R_c(d - \xi' x) + R'_s(d - d') \quad (12)$$

Onde:

$F_u$  = Força normal última atuante na peça;

$R_c$  = Reação normal do concreto;

$R_s$  = Esforço normal que age na armadura superior;

$R'_s$  = Esforço normal que age na armadura inferior;

$\xi'$  = Coeficiente do braço de alavanca da reação no concreto;

$d'$  = Distância entre as camadas mais extremas da seção;

$e_s$  = Excentricidade da força normal última atuante na peça;

- Flexão simples

Utilizando novamente o equilíbrio de forças e o equilíbrio de momentos:

$$F_u = R_s - R_c - R'_s = 0 \quad (13)$$

$$N_u e_s = M_u = R_c(d - \xi'x) + R'_s(d - d') \quad (14)$$

- Flexo-compressão

Mais uma vez aplicando o equilíbrio de forças e momentos na seção transversal:

$$F_u = R_c + R'_s - R_s \quad (15)$$

$$F_u e_s = R_c(d - \xi'x) + R'_s(d - d') \quad (16)$$

Comparando-se as equações de equilíbrio resultantes, pode se observar que elas são análogas, desde que na flexo-tração seja feito  $F < 0$ .

Desse modo, os 3 problemas podem ser reduzidos em um único, assim pode-se tomar o caso da flexo-compressão como caso básico. Reduzindo essas expressões se tornam:

$$F_u = R_c + R'_s - R_s \quad (17)$$

$$F_u e_s = R_c(d - \xi'x) + R'_s(d - d') \quad (18)$$

Com  $F_u > 0$  na compressão e com  $F_u < 0$  na tração, sendo

$$N_u = F_u \quad (19)$$

No caso de flexão simples, tem-se  $N_u = 0$ , sendo

$$F_u e_s = M_u \quad (20)$$

### 3.3.3 Propriedades básicas das seções retangulares

Para uma seção retangular de modo geral, a resultante das tensões de compressão no concreto pode ser escrita:

$$R_c = \alpha_c f_{cd} \cdot \lambda b x \quad (21)$$

Segundo a NBR 6118 (ABNT, 2014), para concretos de classes até C50:

$$\alpha_c = 0,85$$

$$\lambda = 0,8$$

Para concretos de classes de C55 até C90:

$$\alpha_c = 0,85 \cdot \left[ 1,0 - \frac{f_{ck} - 50}{200} \right] \quad (21)$$

Para concretos de classes acima de C50:

$$\lambda = 0,8 - \frac{f_{ck} - 50}{400} \quad (22)$$

A resultante de tensões em uma determinada camada de aço pode ser calculada

$$R_s = \sigma_{sd} A_s \quad (23)$$

E para uma deformação da armadura  $\varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd}$ ,

$$\sigma_{sd} = \varepsilon_s \cdot E_s \quad (24)$$

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (25)$$

E se  $\varepsilon_s > \varepsilon_{yd}$ ,

$$\sigma_{sd} = f_{yd}$$

Sendo:

$\varepsilon_{yd}$  = Alongamento do aço no início do escoamento;

$\varepsilon_s$  = Deformação no aço;

$E_s$  = Módulo de elasticidade do aço;

$\alpha_c$  = Parâmetro de redução da resistência do concreto na compressão;

$\lambda$  = Relação entre a profundidade  $y$  do diagrama retangular de compressão equivalente e a profundidade efetiva  $x$  da linha neutra;

## 4. APLICAÇÕES E RESULTADOS

Para a análise da seção retangular de concreto armado, foram estabelecidas diferentes configurações de distribuição de armadura a fim de tentar analisar as características de resistência de cada uma delas, para diferentes situações. Para o cálculo numérico foi considerada uma seção com altura  $h = 1,2 m$  e base  $b = 0,6 m$  apenas para a obtenção dos valores no programa, porém a variação das dimensões da peça e das bitolas é permitida desde que se mantenham os requisitos de cobrimento e taxa de armadura máxima estabelecidos na NBR 6118:2014.

### 4.1 Configurações de Armadura

Como o objetivo geral é fazer uma análise de uma seção retangular de concreto armado, analisando os valores do par resistente  $M \times N$ , é preciso gerar uma variação de variáveis para que o comportamento de cada seção seja observável.

Primeiramente foi escolhida uma seção genérica com distribuição de armadura uniforme, que pode ser definida como configuração 1 como mostra a Figura 4.1.

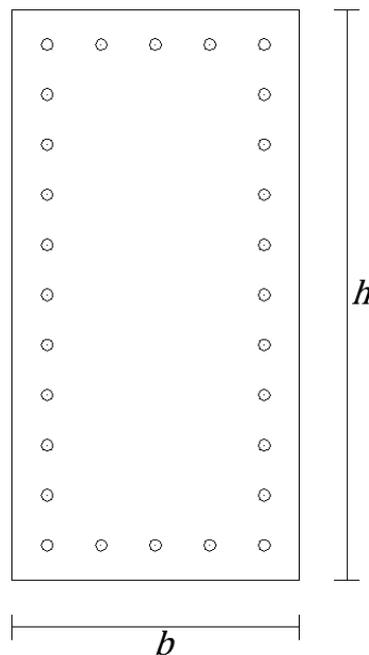


Figura 4.1 – Configuração 1.

Para a segunda configuração, foi escolhida uma distribuição de armadura uniforme lateralmente, como ilustra a Figura 4.2.

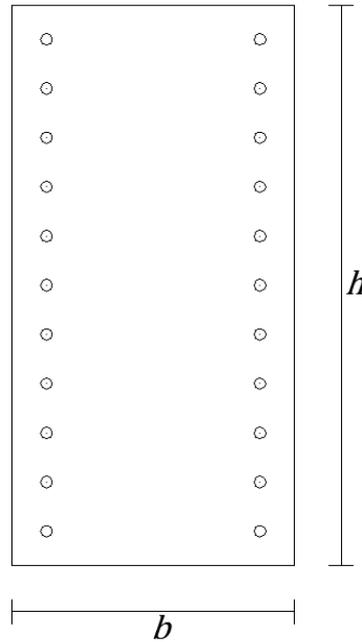


Figura 4.2 – Configuração 2.

Para a terceira configuração foi escolhida uma distribuição uniforme apenas nos extremos superior e inferior da seção, como mostra a Figura 4.3.

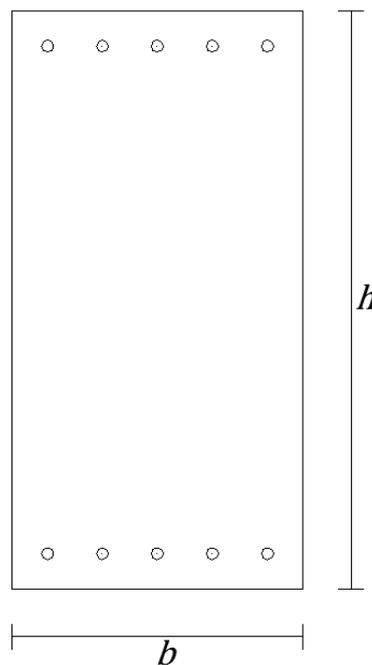


Figura 4.3 – Configuração 3.

E finalmente para a última configuração adotada, foi escolhida uma configuração de distribuição mista, e utilizando menos barras em cada camada, como mostra a Figura 4.4.

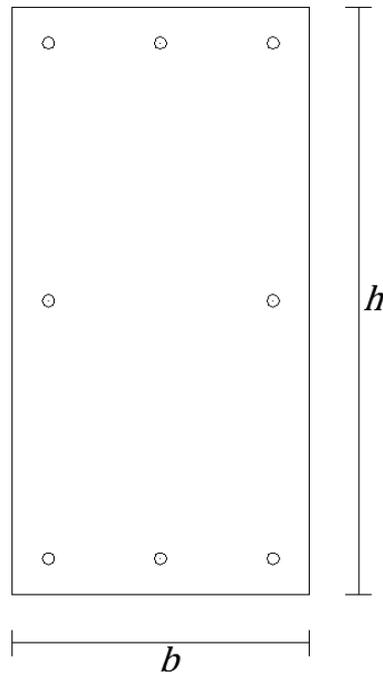


Figura 4.4 – Configuração 4.

## 4.2 Gráficos Gerados

Após definidas as configurações, foi realizada a formulação apresentada anteriormente na fundamentação teórica utilizando o programa EXCEL com o intuito de gerar um gráfico do par resistente  $N \times M$  de cada configuração, como mostrado na Figura 4.5.

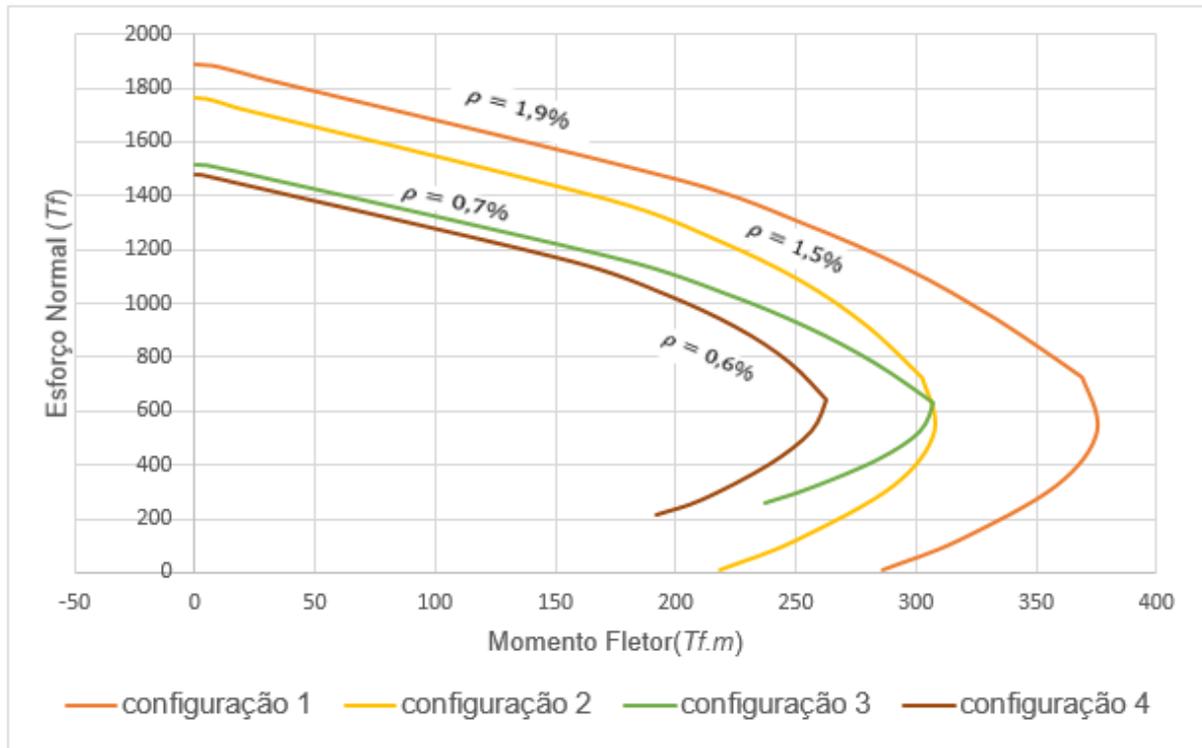


Figura 4.5 – Gráfico do par resistente  $MxN$  para as 4 configurações de armadura.

Conforme esperado os gráficos  $MxN$  seguiram a mesma tendência abordada por Montoya (2004), porém a alteração da distribuição da taxa de armadura traz mudanças significativas no diagrama.

Primeiramente é de fácil observação que a configuração 1 possui maiores valores de momento fletor máximo e esforço cortante máximo, isso se deve ao possuir uma distribuição uniforme de armadura em toda sua seção, e portanto detentora da maior taxa de armadura. Pode se observar que a tendência segue para as configurações seguintes.

Pode-se observar que as configurações 2 e 3 apresentam um ponto de proximidade no que tange ao ponto ótimo, apesar da configuração 2 ter maior taxa de armadura, isso é visto como um caso particular, onde o momento máximo resistente gerado pelos banzos inferior e superior da configuração 3 coincidentemente se aproxima do gerado pela configuração 2. Entretanto, caso sejam alteradas as proporções consideradas nesse trabalho, esse fenômeno não ocorre de maneira contínua, somente como um fenômeno isolado. Pode-se destacar também que configuração 2 apresenta valores muito superiores de esforço normal máximo,

resultado que era esperado, visto que uma configuração com mais barras apresenta resistência maior ao esforço normal.

A configuração 4 apresenta esforço normal máximo e momento fletor máximo inferior às outras disposições, isso pode ser justificado pela taxa de armadura inferior às demais.

Para avaliar a influência do  $f_{ck}$  no valor do diagrama foram plotados os sucessivos valores comerciais de  $f_{ck}$  mantendo cada configuração fixa. O resultado para as configurações 1, 2, 3 e 4 podem ser observados respectivamente nas Figuras 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9.

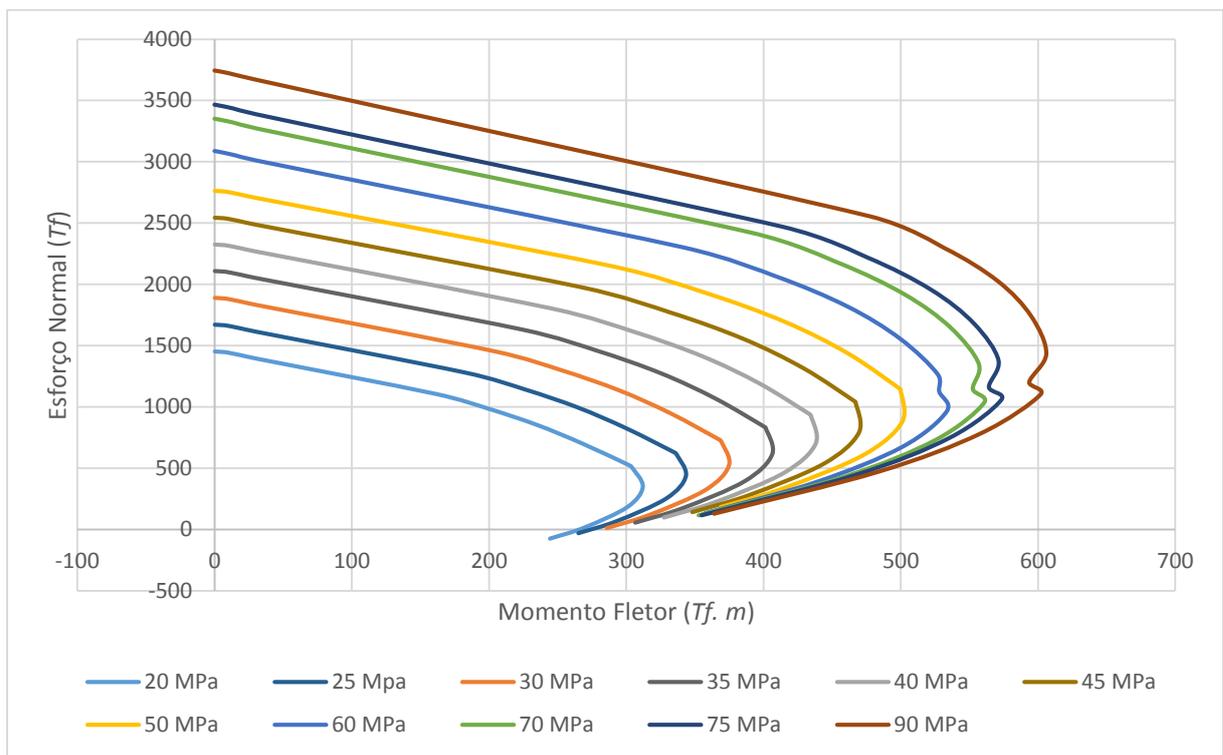


Figura 4.6 – Gráfico da variação do par resistente  $MxN$  para a configuração 1 em relação ao  $f_{ck}$ .

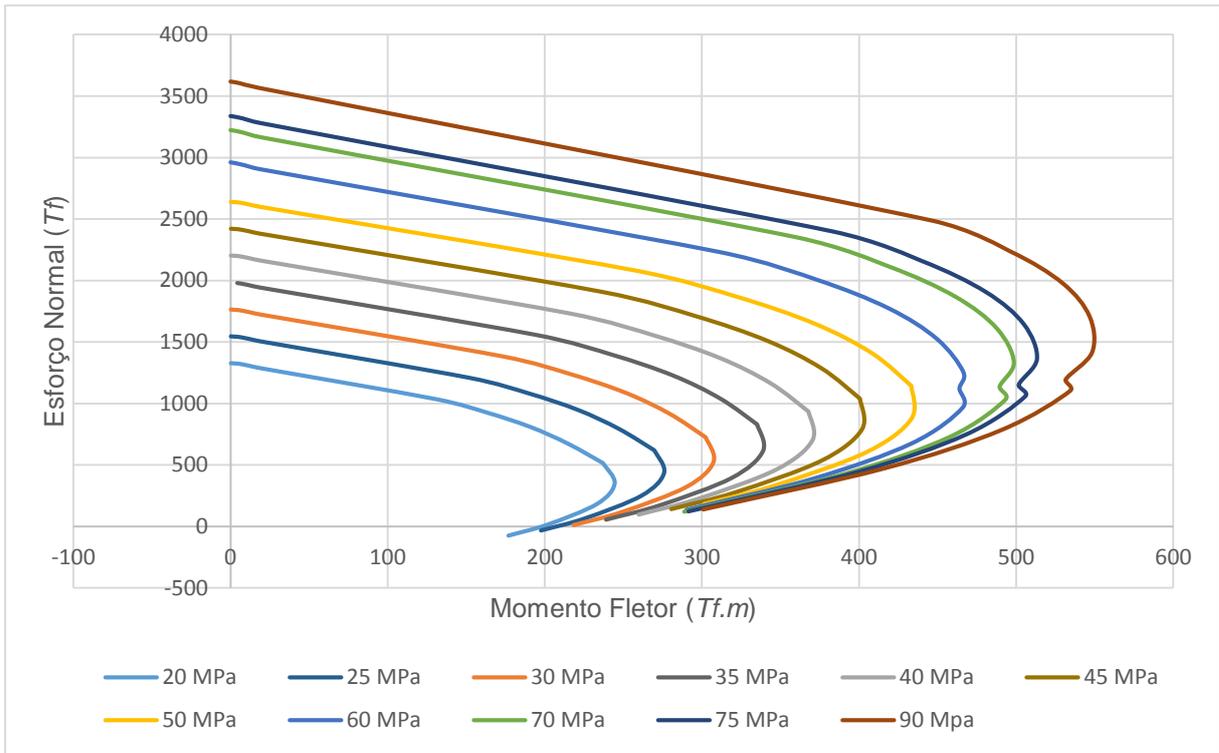


Figura 4.7 – Gráfico da variação do par resistente  $MxN$  para a configuração 2 em relação ao  $f_{ck}$ .

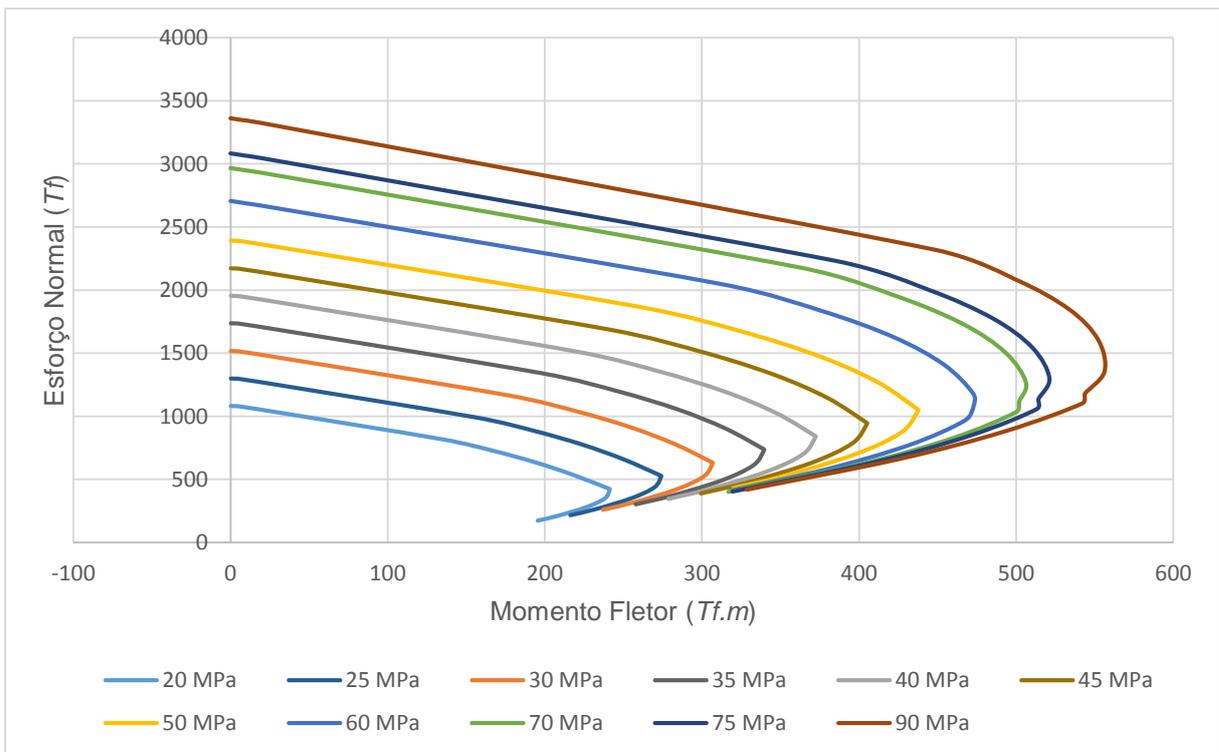


Figura 4.8 – Gráfico da variação do par resistente  $MxN$  para a configuração 3 em relação ao  $f_{ck}$ .

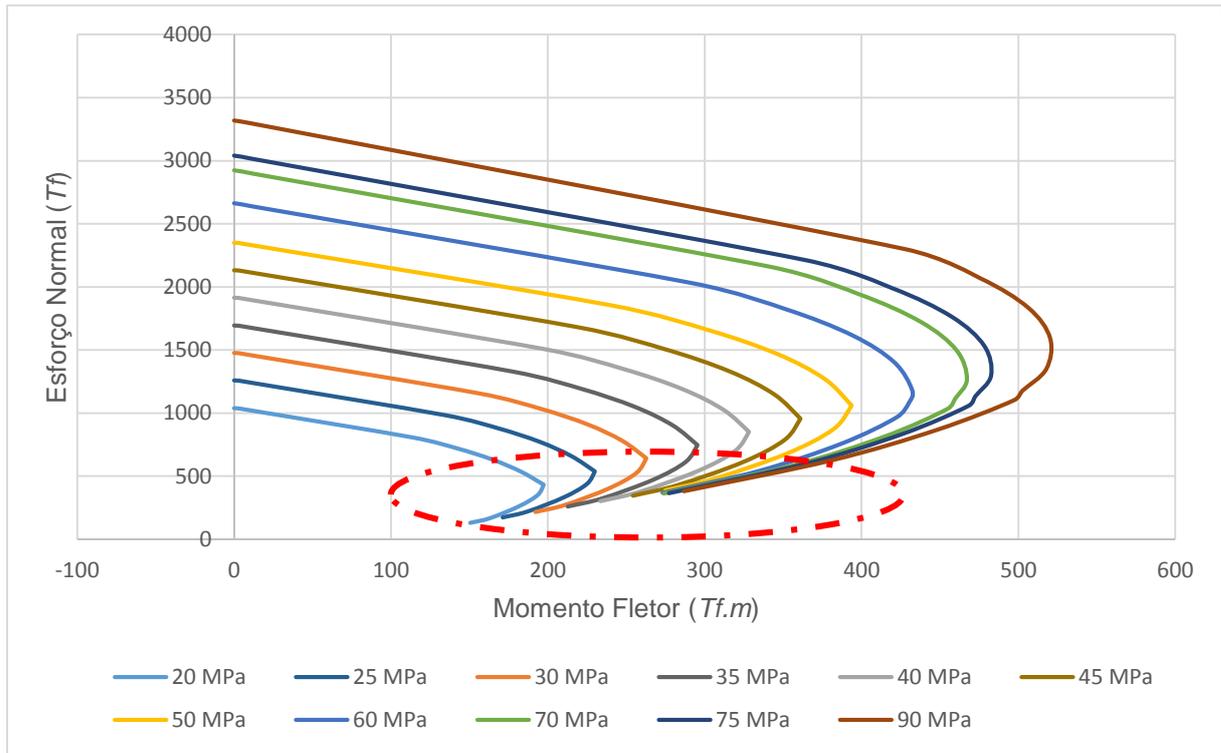


Figura 4.9 – Gráfico da variação do par resistente  $MxN$  para a configuração 4 em relação ao  $f_{ck}$ .

Como observado, a tendência de aumento do momento fletor máximo e do esforço cortante máximo conforme se aumenta o  $f_{ck}$  se manteve para todas as configurações.

Pode-se observar que, na faixa do Domínio 5, conforme destacado na Figura 4.9 todas as configurações apresentam uma zona de convergência no que se diz ao momento. Isso se deve ao fato do momento tender a zero quando o valor de  $x$  tende ao infinito, independentemente do valor do  $f_{ck}$ . Nessa faixa, a influência do  $f_{ck}$  é mais expressiva nos valores de esforço normal, apesar de ser menos expressiva que nos outros domínios. Nesta faixa de domínio, há uma maior proximidade nos valores do esforço normal resistente para concretos de alta resistência que os concretos de baixa resistência.

Para visualizar a influência da taxa de armadura escolhida no projeto no par resistente  $MxN$ , foram gerados gráficos com taxa de armadura crescente para todas as configurações adotadas nesse estudo, de modo que seja possível discorrer sobre esta influência e suas particularidades. Pode ser observado os resultados obtidos nas Figuras 4.10, 4.11, 4.12 e 4.13.

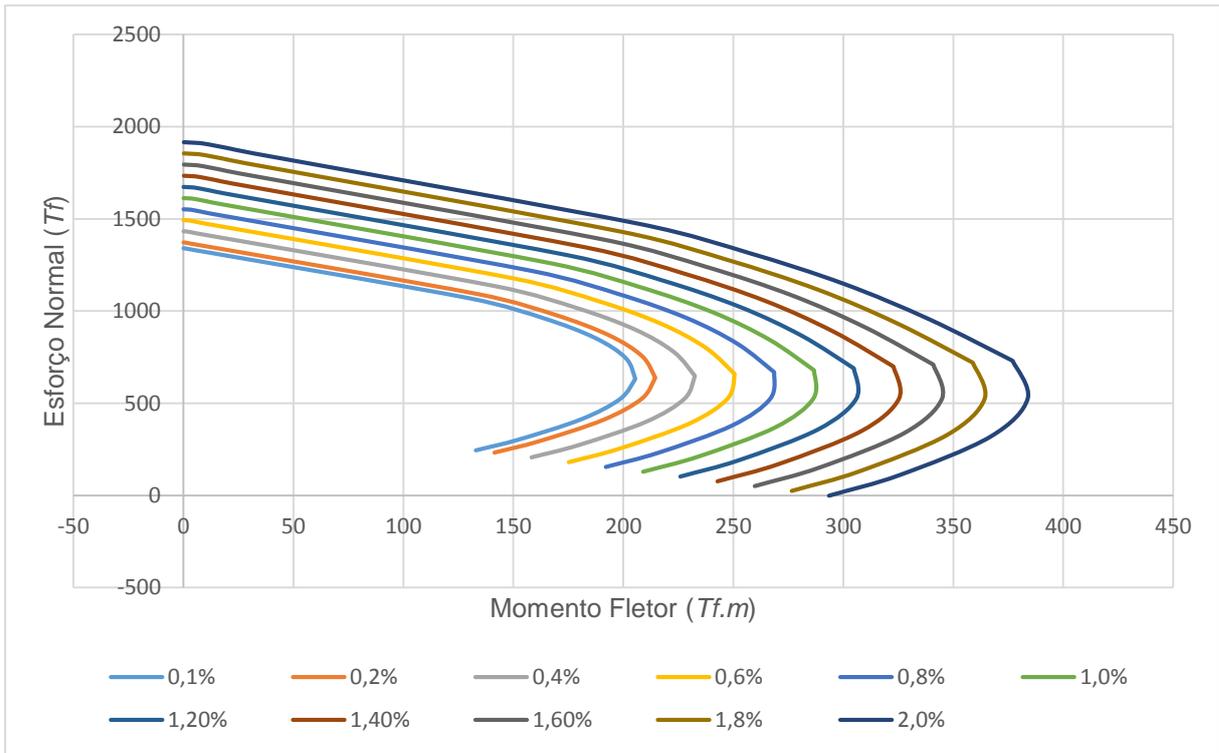


Figura 4.10 – Variação do par resistente  $MxN$  para configuração 1 em relação à taxa de armadura  $\rho$ .

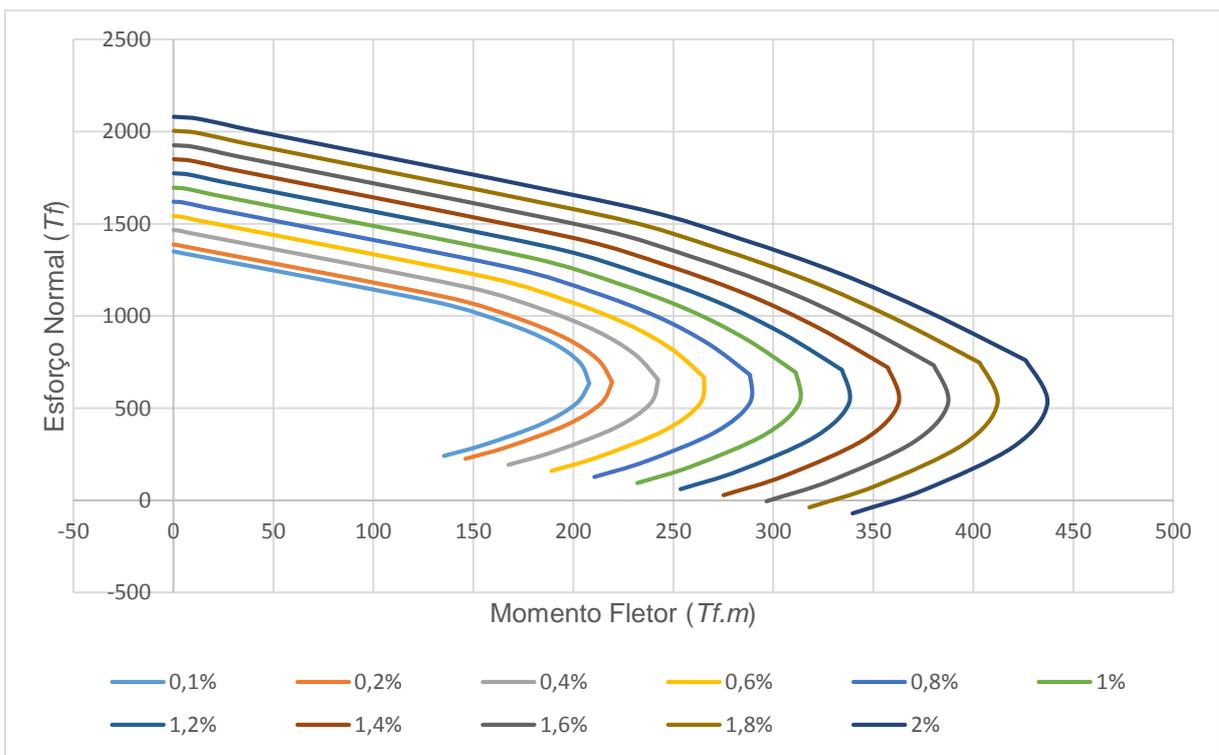


Figura 4.11 – Variação do par resistente  $MxN$  para configuração 2 em relação à taxa de armadura  $\rho$ .

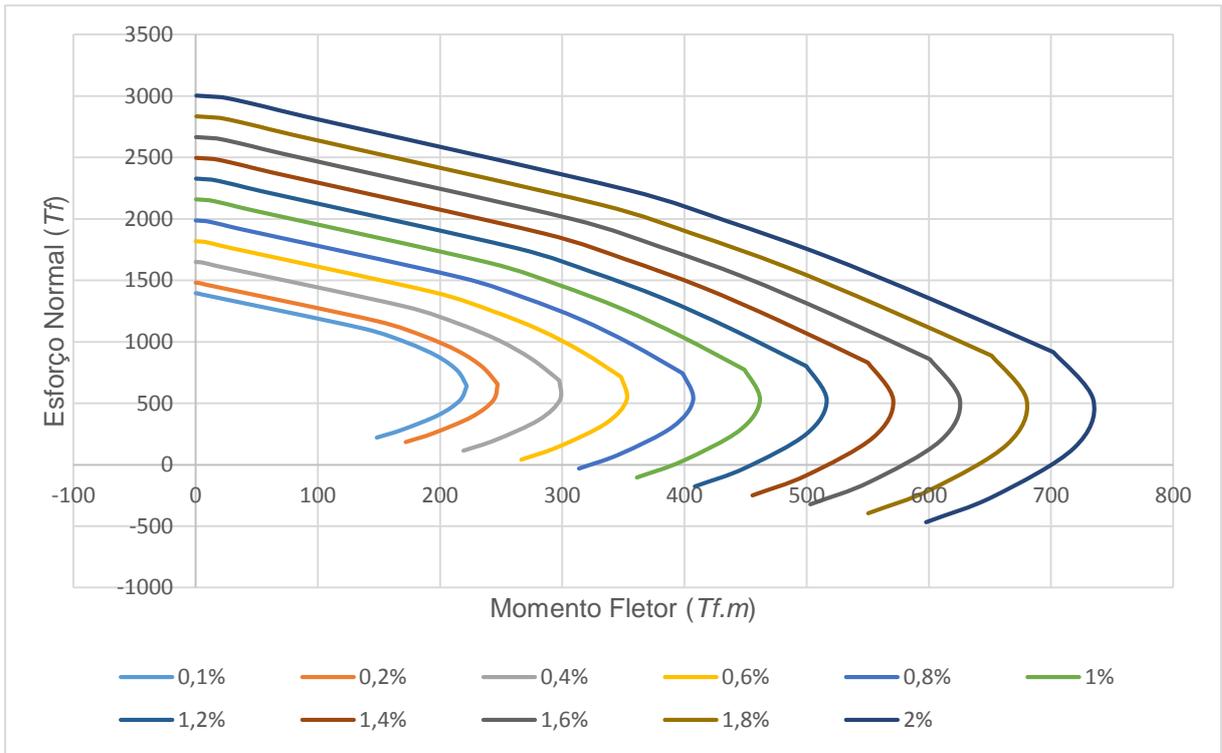


Figura 4.12 – Variação do par resistente  $M \times N$  para configuração 3 em relação à taxa de armadura  $\rho$ .

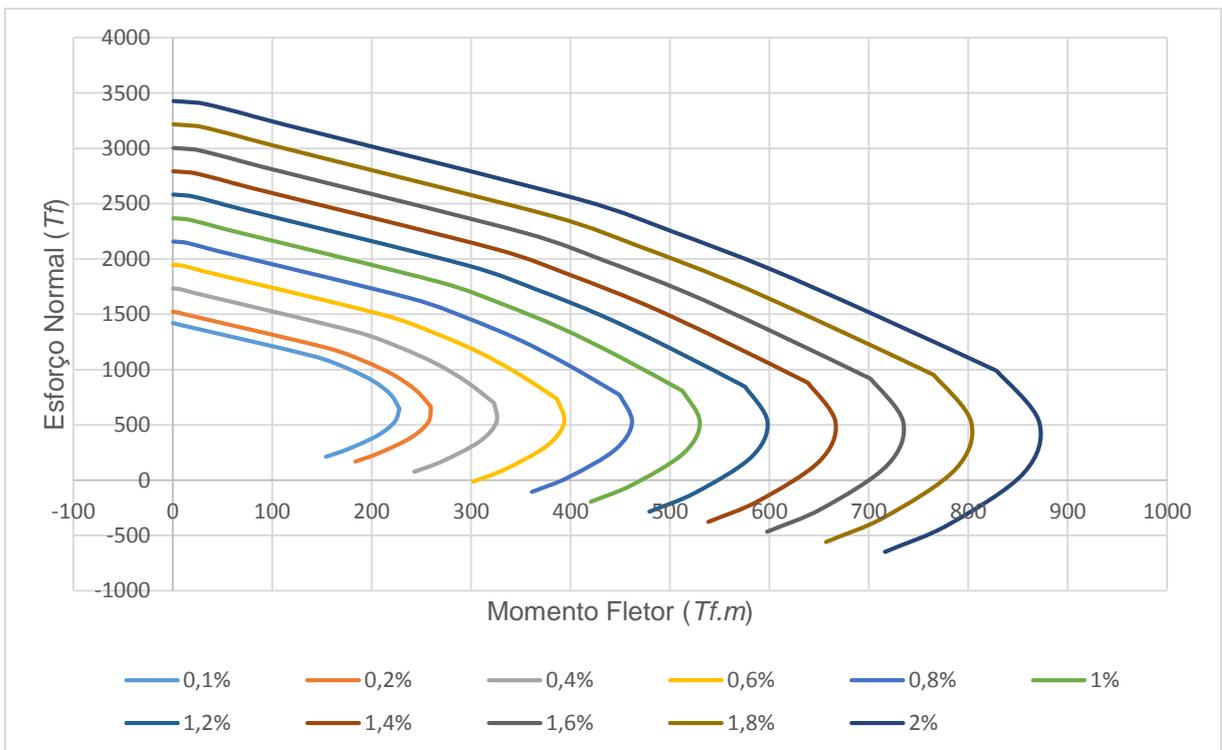


Figura 4.13 – Variação do par resistente  $M \times N$  para configuração 4 em relação à taxa de armadura  $\rho$ .

Como esperado, o aumento do momento fletor máximo e do esforço cortante máximo conforme se aumenta a taxa geométrica de armadura  $\rho$  se manteve para todas as configurações.

Pode se destacar que, em todos os gráficos, há uma maior espaçamento entre os valores do par  $M \times N$  ao redor da chamada zona ótima, que é onde se tem o momento fletor resistente máximo. Pode ser atribuído esse espaçamento maior porque nessa região há o aproveitamento máximo da estrutura, dessa forma, uma taxa de armadura maior gera um par resistente maior nesse trecho.

A influência do aumento da taxa de armadura se mostrou muito mais expressiva em configurações nas configurações 3 e 4, do que as configurações 1 e 2. Ou seja, para uma mesma taxa de armadura, e com mesmo  $f_{ck}$ , a variação da resistência da seção se dá basicamente pela disposição das barras.

Outro ponto a se notar é que se forem fixados, uma taxa de armadura geométrica e uma resistência característica à compressão do concreto, os valores do par resistente são maiores na configuração 4, seguido da configuração 3, que possui valores maiores que a configuração 2, que, por sua vez, apresenta valores maiores que a configuração 1.

## 5. CONCLUSÃO

O trabalho realizado tratou da análise de estruturas com diferentes seções retangulares, sujeitas a flexão composta reta utilizando uma comparação gráfica entre as disposições adotadas.

Tendo como objetivo obter o gráfico  $M \times N$ , foram adotadas diferentes disposições de armadura, para que fosse possível fazer uma análise da influência dessa distribuição nos valores finais de momento fletor e esforço normal.

Para gerar os gráficos foi usado o programa EXCEL para a formulação em planilhas de cada configuração de armadura, e após isso, foram realizadas as variações nos atributos de resistência característica a compressão do concreto e na taxa de armadura geométrica de cada uma.

A análise feita através desse método tem como grandes vantagens a versatilidade do programa que pode ser alterado infinitas vezes, a depender da necessidade do projetista, a facilidade de implementação, uma vez que não há maiores dificuldades em se programar na plataforma EXCEL, rapidez na obtenção dos gráficos já que se trata de um algoritmo simples.

A seção transversal estudada é uma seção genérica, de modo que podem ser refeitos os cálculos modificando suas dimensões, desde que sejam respeitadas as proporções e os requisitos de taxa de armadura máxima, cobrimento e espaçamento mínimo entre barras, dessa forma, é possível estudar e analisar infinitos modelos estruturais.

Foi observado que, fixando um  $f_{ck}$ , os valores de momento fletor máximo e esforço normal máximo são maiores em configurações em que a taxa de armadura é maior, porém, em situações em que a taxa é a mesma, esses valores de resistência da seção são definidos pela disposição escolhida.

Pode-se concluir que a influência do  $f_{ck}$  nos valores de resistência varia de acordo com o domínio, sendo que, no domínio 5, especialmente no que se diz a concretos de alta resistência, a variação é muito menor.

Para todo e qualquer método de dimensionamento de estruturas de concreto armado, se faz necessária a obtenção desses valores básicos com relação à estrutura, ou seja, primeiramente se faz o lançamento e a análise, para posteriormente se conseguir dimensionar e detalhar cada peça estrutural de acordo com a norma vigente. Dessa forma, em uma possível otimização de uma determinada estrutura se fazem necessárias as relações analisadas neste trabalho.

As aplicações desse trabalho estão nos mais variados tipos de dimensionamento, desde a cálculos convencionais de pilares e vigas simples, até o cálculo de longarinas de uma ponte utilizando processos de otimização de alta precisão.

### **Sugestões de trabalhos futuros**

- Desenvolver a mesma metodologia para flexão composta oblíqua, isto é, aquela que além do esforço normal tem os momentos fletores aplicados nas direções x e y simultaneamente;
- Desenvolver ambos os modelos utilizando protensão;
- Trabalhar com seções não retangulares;
- Simular reforços na estrutura;

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARGOLO, W. P. de. **Otimização de Seções de Concreto Armado Submetidas à Flexo-compressão Reta Utilizando Algoritmos Genéticos**. 2000. 141 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2000.

ALEXANDRE, L. J. **Otimização do Pré-projeto de Vigas de Concreto Armado Utilizando Algoritmos Genéticos**. 2014. 132 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – procedimento**. Rio de Janeiro. 2014.

BASTOS, E. A. **Otimização de Seções Retangulares de Concreto Armado Submetidas à Flexo-compressão Oblíqua Utilizando Algoritmos Genéticos**. 2004. 151 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2004.

CORTES, C. F. M. **Otimização do Projeto da Superestrutura de Pontes Pré-fabricadas pelo Método dos Algoritmos Genéticos**. 2010. 202 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2010.

FUSCO, P. B. **Estruturas de Concreto: Solicitações Normais**. Rio de Janeiro. Guanabara Koogan S. A., 1984

GUERRANTE, I. C. **Análise Numérica de Vigas de Concreto Armado Reforçadas por Encamisamento Parcial**. 2013. 109 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2013.

MONTOYA, P. J., MESEGUER, A. G., e CABRÉ, F.M. **Hormigón Armado**. 14 ed., Barcelona, Espanha. Editorial Gustavo Gili S. A., 2004.