

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS  
MESTRADO EM MATEMÁTICA**

**UMA ABORDAGEM SOBRE DESIGUALDADES E  
SUAS APLICAÇÕES**

**GABRIEL CARVALHO VELAME**

**CRUZ DAS ALMAS  
2014**

# UMA ABORDAGEM SOBRE DESIGUALDADES E SUAS APLICAÇÕES

**GABRIEL CARVALHO VELAME**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Mestrado Profissional em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

**Orientador: Prof<sup>o</sup> Dr. Juarez dos Santos Azevedo**

CRUZ DAS ALMAS  
2014

# UMA ABORDAGEM SOBRE DESIGUALDADES E SUAS APLICAÇÕES

GABRIEL CARVALHO VELAME

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Mestrado Profissional em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

## Banca Examinadora:

Orientador: Juarez dos Santos Azevedo  
Prof<sup>o</sup> Dr. Juarez dos Santos Azevedo - UFRB

Membro: Cícero Alfredo da Silva Filho  
Prof<sup>o</sup> Dr. Cícero Alfredo da Silva Filho - UESC

Membro: Jarbas Alves Fernandes  
Prof<sup>o</sup> Msc. Jarbas Alves Fernandes - UFRB

Cruz das Almas, 20 de Março de 2014.

*Aos meus pais e  
e à minha irmã Daniela,  
com muito amor.*

*"Se as pessoas não acham a Matemática simples é só por que  
ainda não perceberam o quanto a vida é complicada"*  
John von Neumann

## AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, em especial à minha MÃE (*in memoriam*), que sempre me incentivou nos estudos, à minha irmã, ao meu pai, à minha família, pela força dada, à minha noiva e sua família, por estarmos quase sempre juntos nos momentos mais importantes, aos meus amigos. Agradeço por poder contar sempre com todos.

A Instituição e a todos que a compõem.

Ao professor e orientador Prof<sup>o</sup> Dr. Juarez dos Santos Azevedo, pelas contribuições, pela orientação, que me levaram a execução e conclusão deste trabalho.

A todos os colegas do mestrado, que contribuíram diretamente nesta etapa de novos conhecimentos. Por terem sido companheiros em todos os momentos.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho de alguma forma, a todos que passaram pela minha vida e colaboraram para a construção de quem sou hoje. Os meus sinceros agradecimentos.

Agradeço à Daniela, Dannúbia, Jailson e Neilane, Roque, D. Hilda, Alison e Rose, Osnildo, aos amigos da Coplan, aos companheiros do Eliel, que além de companheiros de estrada, tornaram-se grandes parceiros, pela atenção, companhia, conselhos, por todos os risos, por me suportarem nos momentos de intenso cansaço e estresse.

Agradeço ao professor Eleazar Madriz, que sempre me deu apoio.

Enfim, a todos os que, de alguma maneira, contribuíram para a conclusão de mais esta fase da minha vida, os meus sinceros agradecimentos.

Gabriel Carvalho Velame

Este trabalho consiste na abordagem de desigualdades matemáticas e suas aplicações para o ensino médio. Neste sentido destacamos algumas desigualdades importantes na literatura matemática que podem servir de suporte para o conteúdo estudado na matemática elementar.

A elaboração se deu a partir de pré-requisitos básicos de indução, propriedades básicas das desigualdades, módulo de um número real, médias, funções convexas e côncavas e números complexos, seguida da apresentação das desigualdades, com demonstrações acessíveis ao público com conhecimento de matemática básica. O trabalho finaliza com aplicações relacionadas ao tema abordado, proporcionando aos discentes o contato com problemas que estimulam capacidade de raciocínio. A maioria das aplicações fazem relação com conteúdos do programa do ensino básico, na área de geometria, álgebra e otimização.

**Palavras-chave:** álgebra, desigualdades, ensino médio, geometria, otimização.

## ABSTRACT

This work constitutes of mathematical inequalities and their applications to high school approach. In this sense we highlight some important inequalities in mathematics literature that may provide support for the content studied in elementary mathematics.

The preparation took from basic prerequisites induction, basic properties of inequalities, modulus of a real number, medium, convex and concave functions, complex numbers, followed by presentation of inequalities, with statements accessible to the public with knowledge of basic mathematics. The work concludes with applications related to the topic discussed, giving students contact with problems that stimulate reasoning ability. Most applications are compared with the contents of the basic education program in the area of geometry, algebra and optimization.

**Keywords:** algebra, inequalities, high school, geometry, optimization.



<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1 Princípio de Indução Matemática . . . . .	12
1.2 Propriedades Básicas das Desigualdades . . . . .	13
1.3 Módulo de um Número Real . . . . .	14
1.4 Médias . . . . .	15
1.5 Funções convexas e côncavas . . . . .	15
1.6 Conceitos Básicos dos Números Complexos . . . . .	18
1.7 Produto Interno . . . . .	20
<b>2 Desigualdades</b>	<b>22</b>
2.1 Desigualdade de Cauchy-Schwarz . . . . .	22
2.2 Desigualdade Triangular . . . . .	24
2.3 Desigualdade das Médias Aritmética e Quadrática . . . . .	26
2.4 Desigualdade de Jensen . . . . .	27
2.5 Consequências da desigualdade de Jensen . . . . .	28
2.5.1 Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica . . . . .	28
2.5.2 Desigualdade de Young . . . . .	30
<b>3 Aplicações das Desigualdades</b>	<b>33</b>
<b>Conclusão</b>	<b>50</b>

## LISTA DE FIGURAS

1.1	Eixo Orientado. . . . .	13
1.2	Módulo de um número real. . . . .	14
1.3	Distância de $x$ a $y$ . . . . .	14
1.4	Gráfico de uma função: (a) côncava e (b) convexa. . . . .	16
1.5	Vetor $OZ$ . . . . .	18
1.6	Soma de dois complexos. . . . .	19
1.7	Ângulo formado por dois vetores. . . . .	20
2.1	Triângulo $ABC$ . . . . .	24
2.2	Desigualdade triangular. . . . .	25
3.1	Representação geométrica do problema. . . . .	34
3.2	Paralelepípedo de arestas $x$ , $x$ e $h$ . . . . .	36
3.3	Modelo da lata de zinco. . . . .	37
3.4	Representação da folha de cartolina. . . . .	38
3.5	Retângulo de lados $a$ , $b$ e diagonal $c$ . . . . .	41
3.6	Problema das Torres. . . . .	45
3.7	Solução geométrica do problema das torres. . . . .	45

Este trabalho visa construir estratégias que motivem um tema pouco abordado no ensino médio e ensinado as vezes de modo superficial: **as desigualdades**. Muitos problemas de desigualdades foram desenvolvidos na matemática envolvendo grandes matemáticos como Euclides, Arquimedes, Jacques Bernoulli, Newton, Cauchy e outros [1]. A ênfase deste conteúdo nos livros didáticos é escassa, apesar de existir muitos problemas interessantes que podem ser solucionados usando o recurso das desigualdades.

Estima-se que o estudo das desigualdades tenha seu início no século *IVa.C.* com a desigualdade triangular enunciada no livro *I* de *Os Elementos* de Euclides e em seguida com o estudo de otimização para cálculos com figuras geométricas. Sabe-se que durante este período não se conhecia nenhum método uniforme para este tipo de otimização [2]. Neste sentido um dos problemas mais antigos de otimização de figuras planas, pode ser encontrado no livro *VI* de *Os Elementos* de Euclides, adaptado através do enunciado: "De todos os retângulos com o mesmo perímetro, qual tem área máxima?"[3].

No presente trabalho foram abordadas algumas desigualdades, como exemplos: a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a desigualdade triangular, a desigualdade entre as médias, a desigualdade de Jensen, entre outras. No caso da desigualdade de Cauchy-Schwarz, possui grandes aplicações na análise, álgebra linear, mecânica quântica, probabilidade, estatística e outras [4]. A desigualdade triangular que é empregada nas aplicações de geometria euclidiana e nos números complexos [5, 6]. A desigualdade entre as médias, abordada no ensino médio e superior para resolver problemas de otimização [7]. A desigualdade de Jensen bastante utilizada no estudo de otimização de funções convexas e ganhando destaque nas áreas

de mecânica, termodinâmica, probabilidade, etc [8, 9].

Apesar da inúmeras aplicações das desigualdades na matemática superior, existe uma grande lacuna na aplicação destas desigualdades no ensino médio. Isto serve de motivação para estudarmos o tema em questão e propor novas estratégias que estimulem o seu estudo e suas aplicações para o ensino básico, visto que é importante para incentivar a linguagem matemática e o pensamento algébrico. De um modo geral as desigualdades começam a ser trabalhadas no ensino médio a partir das inequações, inseridas no estudo das funções. No entanto há uma certa dificuldade por parte dos alunos em compreender tal conteúdo, já que os mesmos têm dificuldade em resolver simples equações, ou seja, a partir do momento em que começam a lidar com álgebra o entendimento dos conteúdos se torna mais complicado [10].

Desta forma pretende-se mostrar a sua importância para diversas situações que envolvem a matemática em vários contextos com abordagem no ensino médio, destacando várias aplicações das desigualdades, como exemplo, problemas relacionados a máximos e mínimos, envolvendo conceito de perímetro, áreas, volume, dentre outros. O objetivo é que o aluno tenha uma noção básica, explorando sua capacidade de raciocínio, causando mais interesse e mais aprofundamento no conteúdo.

Para tanto, o trabalho foi dividido em três capítulos. O Capítulo *I* trata das preliminares, onde se busca falar sobre algumas noções que facilitarão o entendimento do conteúdo abordado. O Capítulo *II* é destinado ao estudo de algumas desigualdades e suas demonstrações, onde objetivou-se usar uma linguagem mais acessível, tentando fazer uma relação entre as desigualdades, apresentando as propriedades básicas de algumas desigualdades em várias seções de matemática. Já no Capítulo *III* coube a parte de variadas aplicações na área de geometria, álgebra e otimização. Motivados por este tema e após análise cuidadosa da literatura, observamos que as aplicações aqui inseridas podem ser tratadas sem dificuldades no ensino médio.

NESTE capítulo iremos expor conceitos e resultados básicos de indução, propriedades básicas das desigualdades, módulo de um número real, médias, funções côncava e convexa, números complexos, produto interno, que se fazem necessários para uma melhor compreensão do trabalho. Detalhes adicionais acerca destes assuntos podem ser encontrados em [11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19].

## 1.1 Princípio de Indução Matemática

Utilizaremos um princípio de contagem conhecido como axioma de indução que será útil para demonstrarmos a desigualdade de Jensen e suas propriedades sobre o conjunto dos números naturais definido por  $\mathbb{N}$ : *Seja  $X \subset \mathbb{N}$ . Se  $1 \in X$  e se, além disso, o sucessor de todo elemento de  $X$  ainda pertence a  $X$ , então  $X = \mathbb{N}$ .* Um tratamento mais completo pode ser encontrado em [11, 12].

A fim de usarmos uma linguagem na forma de propriedades, e não de conjuntos, podemos reescrever o axioma de indução da seguinte forma: Seja  $P(n)$  uma sentença aberta sobre  $\mathbb{N}$ . Suponha que

- i)  $P(1)$  é verdadeira;
- ii)  $\forall n \in \mathbb{N}$ , sempre que  $P(n)$  é verdadeira, segue que  $P(n + 1)$  é verdadeira. Então,  $P(n)$  é verdadeira para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

## 1.2 Propriedades Básicas das Desigualdades

Destacaremos a seguir algumas propriedades, as quais se referem aos números reais positivos [12]. Para indicarmos que um número real  $x$  é positivo, escrevemos  $x > 0$ . Temos que:

- i) Dado o número real  $x$ , há três possibilidades que se excluem mutuamente: ou  $x$  é positivo, ou  $x = 0$  ou  $-x$  é positivo.
- ii) A soma e o produto de números positivos são ainda números positivos.

Uma relação fundamental entre números reais é a relação de desigualdade  $x < y$ . A desigualdade entre números reais reduz-se ao conhecimento dos números positivos, pois a relação  $x < y$  significa que  $y - x$  é um número positivo. As propriedades importantes desta relação são:

- 1) *Tricotomia*: dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , é válida uma, e somente uma, das relações seguintes:  $x < y$ ,  $x = y$  ou  $y < x$ ;
- 2) *Transitividade*: se  $x < y$  e  $y < z$  então  $x < z$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ;
- 3) *Monotonicidade da adição*: se  $x < y$ , então para todo  $z \in \mathbb{R}$ , tem-se  $x + z < y + z$ ;
- 4) *Monotonicidade da multiplicação*: se  $x < y$  e  $z > 0$  então  $xz < yz$ ;
- 5) Se  $x \neq 0$  então  $x^2 > 0$ ;
- 6) Se  $0 < x < y$  então  $0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ ;
- 7) Se  $x < y$  e  $z$  é negativo então  $xz > yz$ .

*Geometricamente* a relação  $x < y$  significa que, num eixo orientado (Figura 1.1), o ponto de abscissa  $y$  está a direita do ponto de abscissa  $x$ .

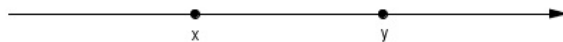


Figura 1.1: Eixo Orientado.

*Algebricamente* tem-se  $x < y$  se, e somente se,  $y - x = k$  é um número positivo. Desta forma, vale  $x < y$  se, e somente se, existe um número real positivo  $k$  tal que  $y = x + k$ .

### 1.3 Módulo de um Número Real

**Definição 1.1.** O módulo de um número real  $x$ , denotado por  $|x|$ , é definido por

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0; \\ -x, & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Outra forma de se definir o módulo é

$$|x| = \sqrt{x^2} = \max\{x, -x\}. \quad (1.2)$$

Observando os números reais como pontos da reta numerada, verificamos que o módulo de um número real  $x$  é a distância de  $x$  a 0 (vide Figura 1.2). Em geral, dados  $x, y \in \mathbb{R}$ , podemos

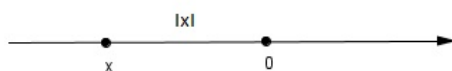


Figura 1.2: Módulo de um número real.

notar que  $|x - y|$  é igual a distância do ponto  $X$  ao ponto  $Y$  na reta, conforme Figura 1.3. Segue

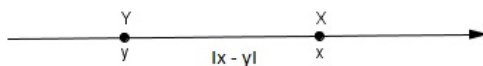


Figura 1.3: Distância de  $x$  a  $y$ .

algumas relações de desigualdade envolvendo módulo de um número real. Para qualquer número real positivo  $d$ :

$$|x| \leq d \Leftrightarrow -d \leq x \leq d; \quad (1.3)$$

$$|x| < d \Leftrightarrow -d < x < d; \quad (1.4)$$

$$|x| \geq d \Leftrightarrow x \leq -d \text{ ou } x \geq d; \quad (1.5)$$

$$|x| > d \Leftrightarrow x < -d \text{ ou } x > d; \quad (1.6)$$

## 1.4 Médias

Nesta seção iremos definir as médias aritmética, geométrica, quadrática e harmônica, requisito básico para trabalharmos com desigualdade entre médias.

### Média aritmética

**Definição 1.2.** A média aritmética  $A$  dos números reais positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é definida por:

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}. \quad (1.7)$$

### Média geométrica

**Definição 1.3.** A média geométrica  $G$  dos números reais positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é definida por:

$$G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}. \quad (1.8)$$

### Média quadrática

**Definição 1.4.** A média quadrática  $Q$  dos números reais positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  é definida por:

$$Q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}. \quad (1.9)$$

### Média harmônica

**Definição 1.5.** A média harmônica  $H$  é definida como o inverso da média aritmética dos inversos dos números. Então para os números reais positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  temos:

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}. \quad (1.10)$$

## 1.5 Funções convexas e côncavas

Este conceito será usado na desigualdade de Jensen, a qual é destaque no capítulo a seguir.

**Definição 1.6.** Uma função contínua  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , com o intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ , é:

i) *convexa*, se  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ ,  $\forall x, y \in I$ .



ii) *côncava*, se  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x, y \in I$ .

Podemos escrever as condições de convexidade e concavidade através da seguinte proposição:

**Proposição 1.1.** Se  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, então:

i)  $f$  é convexa se, e somente se, para todos  $x, y \in I$  e todo  $t \in [0, 1]$ , tivermos:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y). \quad (1.11)$$

ii)  $f$  é côncava se, e somente se, para todos  $x, y \in I$  e todo  $t \in [0, 1]$ , tivermos:

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y). \quad (1.12)$$

A prova da Proposição 1.1 pode ser encontrada em [14].

A definição de convexidade, do ponto de vista geométrico, significa que, para cada par de pontos  $x$  e  $y$  escolhidos no intervalo  $I$ , o gráfico da função encontra-se abaixo do segmento de reta secante que junta os pontos  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  (Figura 1.4(b)). Já na função côncava o gráfico se encontra acima do segmento de reta secante que junta os pontos  $(x, f(x))$  e  $(y, f(y))$  (Figura 1.4(a)).

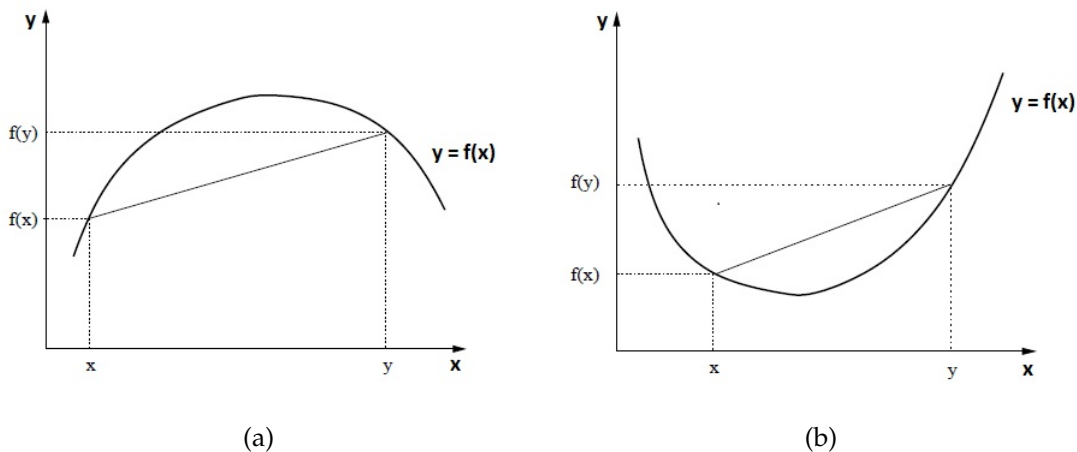


Figura 1.4: Gráfico de uma função: (a) côncava e (b) convexa.

**Exemplo 1:** A função logaritmo natural,  $\log : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , é côncava. De fato dados  $x, y$  números reais positivos, temos  $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ . Como a função  $\log$ , na base  $e$ , é crescente, segue que

$$\log\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \log\sqrt{xy} = \frac{\log(x) + \log(y)}{2}, \quad (1.13)$$

valendo a igualdade se e somente se  $x = y$ . Usaremos este fato para demonstrar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

**Exemplo 2:** Outro resultado interessante que aplicaremos nas desigualdades é o fato da função seno ser estritamente côncava no intervalo  $[0, \pi]$ . Seguindo as ideias de Neto [14] e considerando  $x, y \in [0, \pi]$ , é suficiente mostrarmos que

$$\sin(x) + \sin(y) \leq 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad (1.14)$$

com igualdade quando  $x = y$ . Para tanto, transformando o primeiro membro em produto, obtemos

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right). \quad (1.15)$$

A condição  $x, y \in [0, \pi]$  garante que  $\frac{x+y}{2} \in [0, \pi]$ , e daí  $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 0$ ; mas como sempre temos  $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \leq 1$ , segue então que

$$2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \leq 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad (1.16)$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se,  $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1$  ou  $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0$ . Vejamos estas duas possibilidades separadamente:

- 1)  $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1$ : a condição  $x, y \in [0, \pi]$  garante que  $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{x-y}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ , e nesse intervalo temos que  $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = 1$  se e só se  $\frac{x-y}{2} = 0$ , ou seja, se  $x = y$ .
- 2)  $\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = 0$ : segue de  $\frac{x+y}{2} \in [0, \pi]$  que  $\frac{x+y}{2} = 0$  ou  $\pi$ ; mas como  $x, y \in [0, \pi]$ , isso é similar a  $x = y = 0$  ou  $x = y = \pi$ .

**Exemplo 3:** Outro resultado a ser usado nas aplicações é o fato da função quadrática  $f(x) = x^2$  ser convexa em qualquer intervalo fechado  $[\alpha, \beta]$ . De fato, sejam  $x, y \in [\alpha, \beta]$ , então, para todo

$t \in [0, 1]$  valem as desigualdades:

$$\begin{aligned}(tx + (1-t)y)^2 &= t^2x^2 + (1-t)^2y^2 + 2t(1-t)xy \\ &\leq t^2x^2 + (1-t)^2y^2 + t(1-t)(x^2 + y^2) \\ &= x^2[t^2 + t(1-t)] + y^2[(1-t)^2 + t(1-t)] \\ &= tx^2 + (1-t)y^2,\end{aligned}\tag{1.17}$$

onde da primeira para segunda linha usou-se a desigualdade  $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2}$ .

## 1.6 Conceitos Básicos dos Números Complexos

Neste trabalho, a desigualdade triangular é aplicada a valores complexos. Assim, usando a referência de Carmo [16], iremos considerar o conjunto  $\mathbb{C}$  como o conjunto dos números complexos, munido das operações de adição e de multiplicação e satisfazendo os seguintes itens:

- a) Existe um número  $i \in \mathbb{C}$  com  $i^2 = -1$ ;
- b) Todo número  $Z \in \mathbb{C}$  pode ser escrito de uma maneira única na forma  $a + bi$ , onde  $a$  e  $b \in \mathbb{R}$ . Usa-se a notação  $Re(Z) = a$  e  $Im(Z) = b$  para designar a parte real e imaginária respectivamente do número complexo  $Z = a + bi$ .

Da definição adotada, decorre que podemos pensar em  $Z = a + bi$  como um ponto  $(a, b)$  do plano cujas coordenadas são  $a$  e  $b$ , ou ainda como *vetor* (isto é, o segmento orientado) de origem  $O$  no sistema de coordenadas e extremidade  $(a, b)$  cujo vetor é dado por  $\vec{OZ}$  (Figura 1.5). No

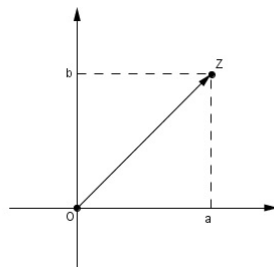


Figura 1.5: Vetor  $\vec{OZ}$ .

primeiro caso, o ponto  $(a, b)$  é chamado de imagem do complexo  $Z = a + bi$ . No último caso, os números  $a$  e  $b$  são chamados *componentes* do vetor  $\vec{OZ}$ .

A operação soma de dois complexos é representada por um vetor, cujas componentes são as somas das componentes dos vetores dados. Geometricamente a Figura 1.6 estabelece a diagonal do paralelogramo construído através da soma dos vetores dados. Além disso o conjugado

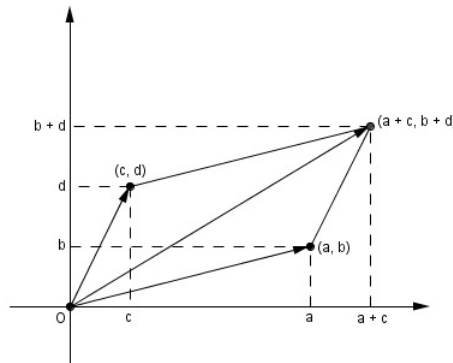


Figura 1.6: Soma de dois complexos.

de um número complexo  $Z = a + bi$ , é definido como  $\bar{Z} = a - bi$  e o seu módulo é o número real não negativo  $|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ . Geometricamente,  $|Z|$  mede a distância de  $O$  a  $Z$ , ou seja, mede o módulo do vetor que representa o complexo  $Z$ . O conjugado e o módulo dos números complexos possuem algumas relações interessantes conforme descritas a seguir:

Para todo  $Z, W \in \mathbb{C}$ , temos

$$\overline{Z \cdot W} = \bar{Z} \cdot \bar{W}; \quad (1.18)$$

$$\overline{Z \pm W} = \bar{Z} \pm \bar{W}; \quad (1.19)$$

$$\overline{\bar{Z}} = Z; \quad (1.20)$$

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{Z + \bar{Z}}{2}; \quad (1.21)$$

$$Z \cdot \bar{Z} = |Z|^2; \quad (1.22)$$

$$|Z| = |\bar{Z}| = |-Z|; \quad (1.23)$$

$$\operatorname{Re}(Z) \leq |\operatorname{Re}(Z)| \leq |Z|; \quad (1.24)$$

$$\operatorname{Im}(Z) \leq |\operatorname{Im}(Z)| \leq |Z|; \quad (1.25)$$

$$|Z \cdot W| = |Z| \cdot |W|; \quad (1.26)$$

e

$$|Z + W| \leq |Z| + |W|, \quad (1.27)$$

chamada de desigualdade triangular, que mostraremos na aplicação 3. Na próxima seção iremos definir algumas operações entre vetores através do produto interno.

## 1.7 Produto Interno

Uma das operações entre vetores é o produto interno.

**Definição 1.7.** *Sejam  $\vec{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  e  $\vec{v} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  vetores em  $\mathbb{R}^n$ , definimos o produto interno euclidiano como:*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n. \quad (1.28)$$

Usaremos a notação  $\|\vec{u}\|$  para indicar a norma ou comprimento de um vetor  $\vec{u}$  arbitrário que é dado pelo comprimento de um segmento representante de  $\vec{u}$ . Se  $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ , com  $\vec{u} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , temos que

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}. \quad (1.29)$$

Em particular, se  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  e  $\vec{v} = \vec{AA}'$  então  $\|\vec{v}\| = \text{dist}(A, A')$ . No caso de um sistema de coordenadas, se  $\vec{v} = (\alpha, \beta)$  então

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (1.30)$$

O ângulo entre dois vetores não nulos, por exemplo,  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ , é por definição o ângulo  $\widehat{BAC}$ , onde  $\vec{u} = \vec{AB}$  e  $\vec{v} = \vec{AC}$  são representações dos vetores dados mediante segmentos orientados com origem em  $A$  (Figura 1.7).

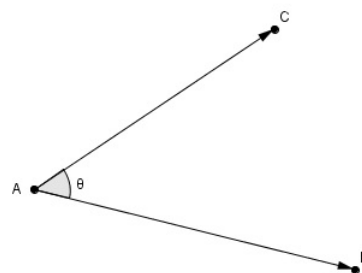


Figura 1.7: Ângulo formado por dois vetores.

Podemos definir o produto interno euclidiano entre  $\vec{u}, \vec{v}$  de outra forma:

**Definição 1.8.** O produto interno dos vetores não-nulos  $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ , é o número

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \begin{cases} \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta, & \text{se } \vec{u} \neq 0 \text{ e } \vec{v} \neq 0; \\ 0, & \text{se } \vec{u} = 0 \text{ ou } \vec{v} = 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Vejamos algumas propriedades importantes de produto interno:

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle; \quad (1.32)$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle; \quad (1.33)$$

$$\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = \|\vec{u}\|^2; \quad (1.34)$$

$$\langle k\vec{u}, \vec{u} \rangle = k\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle, k \in \mathbb{R}. \quad (1.35)$$

Estas propriedades do produto interno serão necessárias na apresentação da desigualdade de Cauchy, como também na desigualdade triangular. No próximo capítulo abordaremos estas desigualdades. Um tratamento mais completo desta seção pode ser encontrado em [17, 18, 19].

NESTE capítulo será feita uma abordagem sobre algumas desigualdades e suas respectivas demonstrações. O objetivo é enfatizar a importância de tais desigualdades e suas aplicações na literatura matemática, como na resolução de problemas de otimização, geometria, álgebra e análise.

## 2.1 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Esta importante desigualdade, aparece em alguns contextos da matemática, como na álgebra linear (na aplicação de vetores), na análise matemática, na resolução de problemas, dentre outras. Para prová-la, iremos apresentar uma demonstração simples usando apenas o trinômio do segundo grau. Seguiremos a ideia de [20].

**Teorema 2.1.** *Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$  números reais, não todos nulos ( $n > 1$ ), tem-se*

$$|a_1b_1 + \dots + a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}. \quad (2.1)$$

*Além disso, a igualdade só ocorre se existir um número real positivo  $\alpha$ , tal que  $a_1 = \alpha b_1, \dots, a_n = \alpha b_n$  ou  $b_1 = \alpha a_1, \dots, b_n = \alpha a_n$ .*

**Demonstração.** Considere o trinômio do segundo grau

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2. \quad (2.2)$$

Desenvolvendo cada parcela da soma acima, temos que

$$f(x) = (a_1^2 + \dots + a_n^2)x^2 - 2(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)x + (b_1^2 + \dots + b_n^2). \quad (2.3)$$

Note que  $f(x)$  é uma soma de quadrados, logo  $f(x) \geq 0$  para todo real  $x$ . Nessas condições o discriminante do trinômio do segundo grau deve ser  $\Delta \leq 0$ , ou seja,

$$[-2(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)]^2 - 4(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2) \leq 0. \quad (2.4)$$

Daí,

$$4(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)^2 \leq 4(a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2). \quad (2.5)$$

Simplificando o fator 4 e extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, encerramos a prova da desigualdade de Cauchy. A igualdade segue se  $\Delta = 0$ , ou seja, o trinômio tem uma raiz real  $\alpha$ . Logo substituindo  $\alpha$  na identidade (2.2) temos:

$$(a_1\alpha - b_1)^2 + (a_2\alpha - b_2)^2 + \dots + (a_n\alpha - b_n)^2 = 0. \quad (2.6)$$

Segue que todos os parênteses devem ser nulos, implicando que os  $a_i$  e  $b_i$  devem ser proporcionais, isto é,  $b_i = \alpha a_i$ .  $\square$

Apresentaremos agora a desigualdade de Cauchy usando a definição de produto interno. Ao tomarmos módulo em ambos os membros da identidade (1.31) e sabendo que  $|\cos(\theta)| \leq 1$  para todo  $\theta$ , obtemos a desigualdade de Cauchy:

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|. \quad (2.7)$$

A igualdade é válida se, e somente se,  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são múltiplos um do outro. A demonstração pode ser encontrada em [21, 4].

Vejam agora a interessante relação entre as equações (2.1) e (2.7), através das expressões a seguir:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n, \quad (2.8)$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2, \quad (2.9)$$

$$\|\vec{v}\|^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2. \quad (2.10)$$

Fazendo as substituições de tais expressões na desigualdade (2.7), verificamos a desigualdade (2.1).



## 2.2 Desigualdade Triangular

Nesta seção faremos uma abordagem sobre a desigualdade triangular a qual tem sido extensivamente referida nas aplicações matemáticas e tem origem na geometria euclidiana. Maiores detalhes podem ser encontrados em [6, 22, 15].

**Teorema 2.2.** *Dado o triângulo  $ABC$  (vide Figura (2.1)), o comprimento de um dos lados é sempre inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados, ou seja,*

$$AB < AC + CB, \quad (2.11)$$

$$AC < AB + BC, \quad (2.12)$$

$$BC < BA + AC. \quad (2.13)$$

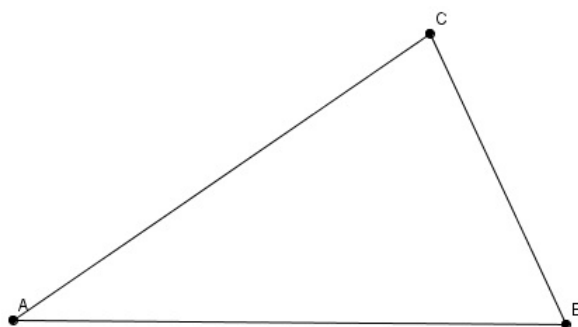


Figura 2.1: Triângulo  $ABC$ .

Apresentamos a seguir uma versão da desigualdade triangular para números reais a qual faz analogia com a geometria plana, envolvendo módulo de números reais.

**Proposição 2.1.** *Para todos os reais não nulos  $a$  e  $b$ , temos*

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad (2.14)$$

*ocorrendo a igualdade se e só se  $a$  e  $b$  tiverem o mesmo sinal.*

**Demonstração.** Se  $a + b \geq 0$ , então  $|a + b| = a + b \leq |a| + |b|$ . Caso contrário, se  $a + b < 0$ , então  $|a + b| = -a - b \leq |a| + |b|$ .  $\square$

Também são válidas as desigualdades que seguem:

$$|a - b| \leq |a| + |b|, \quad (2.15)$$

$$|a - b| \geq |a| - |b|, \quad (2.16)$$

$$|a - b| \geq ||a| - |b||. \quad (2.17)$$

Destacamos a versão geral da desigualdade triangular, também conhecida na literatura matemática:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|, \quad (2.18)$$

ocorrendo a igualdade se, e somente se  $a_1, a_2, \dots, a_n$  tiverem todos o mesmo sinal.

A desigualdade triangular pode ser enunciada na próxima proposição usando vetores. Para prová-la seguiremos as ideias de [21] usando a desigualdade de Cauchy (2.7).

**Proposição 2.2.** Para todos os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  do plano vale a desigualdade triangular:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|, \quad (2.19)$$

valendo a igualdade se, e somente se, um dos vetores  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  é zero ou são múltiplos positivos um do outro.

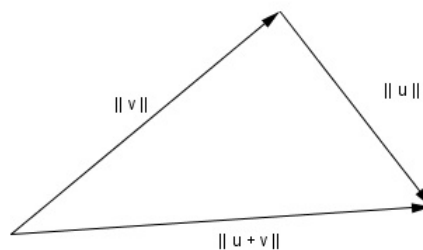


Figura 2.2: Desigualdade triangular.

**Demonstração.** Como estamos trabalhando com números reais não negativos, a desigualdade (2.19) equivale à desigualdade:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2. \quad (2.20)$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz (2.7) e das propriedades de produto interno (1.33), (1.35), temos:

$$\begin{aligned}\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2,\end{aligned}\tag{2.21}$$

concluindo que

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.\tag{2.22}$$

Na próxima seção iremos introduzir as desigualdades das médias aritmética e quadrática aplicando a desigualdade de Cauchy (2.1).

## 2.3 Desigualdade das Médias Aritmética e Quadrática

Uma prova alternativa da desigualdade das médias aritmética e quadrática é dada pela seguinte proposição (vide [23]):

**Proposição 2.3.** *Dados números reais positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , sua média aritmética é sempre menor ou igual que a média quadrática. Em símbolos:*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}},\tag{2.23}$$

ocorrendo a igualdade se e só se  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Demonstração.** Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 &\leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(1^2 + 1^2 + \dots + 1^2) \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)n.\end{aligned}\tag{2.24}$$

Dividindo ambos os membros por  $n^2$ ,

$$\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n},\tag{2.25}$$

logo,

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}.\square\tag{2.26}$$

## 2.4 Desigualdade de Jensen

Esta desigualdade está inserida no contexto das funções convexas e côncavas, definidas no Capítulo 1. Veremos abaixo a forma generalizada.

**Teorema 2.3.** *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo aberto,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Se  $x_1, \dots, x_n \in I$  e  $t_1, \dots, t_n \in (0, 1)$ , com  $t_1 + \dots + t_n = 1$ , então  $t_1x_1 + \dots + t_nx_n \in I$  e:*

i) *Se  $f$  for convexa, então*

$$f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n), \quad (2.27)$$

*ocorrendo a igualdade no caso em que  $f$  é estritamente convexa se e só se  $x_1 = \dots = x_n$ .*

ii) *Se  $f$  for côncava, então*

$$f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n) \geq t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n), \quad (2.28)$$

*ocorrendo a igualdade no caso em que  $f$  é estritamente côncava se e só se  $x_1 = \dots = x_n$ .*

**Demonstração.** Suponhamos que  $f$  é convexa. Iremos utilizar o Princípio de Indução 1.1 sobre  $n > 1$ . O caso  $n = 2$  segue da própria definição de função convexa. Suponha agora que, para um certo  $n > 2$  e todos  $x_1, \dots, x_n \in I$  e  $t_1, \dots, t_n \in (0, 1)$ , com  $t_1 + \dots + t_n = 1$ , tenhamos  $t_1x_1 + \dots + t_nx_n \in I$  e

$$f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n), \quad (2.29)$$

ocorrendo a igualdade quando  $x_1 = \dots = x_n$ . Consideremos elementos  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1} \in I$  e  $t_1, \dots, t_n, t_{n+1} \in (0, 1)$  tais que  $t_1 + \dots + t_n + t_{n+1} = 1$ . Defina

$$y = \frac{t_1x_1 + \dots + t_nx_n}{1 - t_{n+1}} = s_1x_1 + \dots + s_nx_n, \quad (2.30)$$

com  $s_j = \frac{t_j}{1 - t_{n+1}}$  para  $1 \leq j \leq n$ . Como  $s_1 + \dots + s_n = 1$  e  $s_j \in (0, 1)$  para  $1 \leq j \leq n$ , segue da hipótese de indução que  $y \in I$ . Daí,

$$t_1x_1 + \dots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1} = (1 - t_{n+1})y + t_{n+1}x_{n+1} \in I, \quad (2.31)$$

e a convexidade de  $f$

$$\begin{aligned} f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1}) &= f((1 - t_{n+1})y + t_{n+1}x_{n+1}) \\ &\leq (1 - t_{n+1})f(y) + t_{n+1}f(x_{n+1}), \end{aligned} \quad (2.32)$$

com igualdade se e só se  $y = x_{n+1}$ . Aplicando a outra metade da hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned} f(y) &= f(s_1x_1 + \dots + s_nx_n) \leq s_1f(x_1) + \dots + s_nf(x_n) \\ &= \frac{1}{1 - t_{n+1}}(t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n)), \end{aligned} \quad (2.33)$$

com igualdade se e só se  $x_1 = \dots = x_n$ . Unindo as desigualdades acima, concluímos que

$$\begin{aligned} f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1}) &\leq (1 - t_{n+1})f(y) + t_{n+1}f(x_{n+1}) \\ &\leq t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n) + t_{n+1}f(x_{n+1}), \end{aligned} \quad (2.34)$$

ocorrendo a igualdade se e só se  $y = x_{n+1}$  e  $x_1 = \dots = x_n$ . Mas é imediato verificar que tais condições equivalem a  $x_1 = \dots = x_n = x_{n+1}$ , conforme desejado.

## 2.5 Consequências da desigualdade de Jensen

### 2.5.1 Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica

A desigualdade entre a média aritmética e a média geométrica, utilizada em diversas aplicações matemáticas, pode ser vista como uma consequência da desigualdade de Jensen [14]. Considere a seguinte proposição:

**Proposição 2.4.** *Dados números reais positivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , sua média aritmética é sempre maior ou igual a média geométrica. Em símbolos:*

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}, \quad (2.35)$$

ocorrendo a igualdade se e só se  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Demonstração.** Dados números reais positivos  $a_1, \dots, a_n$  e, sabendo que a função logaritmo natural é sobrejetiva, temos que existem reais  $x_1, \dots, x_n$  tais que  $a_j = \log(x_j)$  para  $1 \leq j \leq n$ . É importante observar que a função  $\log : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  é estritamente côncava. Usando a desigualdade de Jensen podemos notar que

$$\frac{\log(x_1) + \log(x_2) + \dots + \log(x_n)}{n} \leq \log\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right), \quad (2.36)$$

ou ainda

$$\log \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \log \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right),$$

com igualdade se e só se  $x_1 = \dots = x_n$ . Portanto, pelo fato de a função logaritmo natural ser crescente, verifica-se a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, ou seja,  $(G \leq A)$ ,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \left( \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \right). \square \quad (2.37)$$

A próxima desigualdade relaciona as médias geométrica e harmônica. Para demonstrá-la vamos fazer uso da desigualdade que acabamos de estudar seguindo as ideias de [15].

### Desigualdade entre as Médias Geométrica e Harmônica

**Proposição 2.5.** *Dados  $x_1, x_2, \dots, x_n$  números reais positivos tem-se*

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}, \quad (2.38)$$

ou seja,  $H \leq G$ . A igualdade vale se, e somente se,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Demonstração.** Usando a Proposição 2.4 com os números  $x_i$  substituídos por  $\frac{1}{x_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) vale

$$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x_n}}. \quad (2.39)$$

Agora notemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}}{n}} &\leq \sqrt[n]{\frac{1}{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x_n}}} \\ &= \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

concluindo que

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}. \quad (2.41)$$

Observando as desigualdades apresentadas percebemos que  $H \leq G \leq A \leq Q$ , ou seja,

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}}. \quad (2.42)$$

## 2.5.2 Desigualdade de Young

**Teorema 2.4.** *Sejam  $p, q > 1$ , números reais positivos, tais que  $1/p + 1/q = 1$ . Temos que,*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}, \quad (2.43)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*$ .

**Demonstração.** Usando o fato da função logaritmo natural ser estritamente côncava em  $(0, +\infty)$ , considere reais positivos  $a_1, a_2$  e  $b_1, b_2$  tais que  $b_1 + b_2 = 1$ . Pela desigualdade de Jensen (2.28), temos que

$$\log(b_1 a_1 + b_2 a_2) \geq b_1 \log a_1 + b_2 \log a_2, \quad (2.44)$$

com igualdade se e somente se  $a_1 = a_2$ . Fazendo  $b_1 = \frac{1}{p}$ ,  $b_2 = \frac{1}{q}$ ,  $a_1 = x^p$  e  $a_2 = y^q$ , obtemos

$$\log\left(\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \log x^p + \frac{1}{q} \log y^q = \log xy, \quad (2.45)$$

Como a função logaritmo natural é crescente, concluímos que

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \quad (2.46)$$

A igualdade acontece quando  $x^p = y^q$ .  $\square$

A seguir enunciaremos um corolário que é consequência da desigualdade de Young (2.43).

### Desigualdade de Holder

**Proposição 2.6.** *Sejam  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $b_1, b_2, \dots, b_n$  reais positivos e  $p, q > 1$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então*

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.47)$$

com igualdade se e só se

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \dots = \frac{a_n^p}{b_n^q}.$$

**Demonstração.** Fazendo  $A = (\sum_{i=1}^n a_i^p)^{\frac{1}{p}}$  e  $B = (\sum_{i=1}^n b_i^q)^{\frac{1}{q}}$ , temos

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq AB \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{A} \cdot \frac{b_i}{B} \leq 1. \quad (2.48)$$

Sendo  $x_i = \frac{a_i}{A}$  e  $y_i = \frac{b_i}{B} \implies$

$$\sum_{i=1}^n x_i^p = \frac{1}{A^p} \sum_{i=1}^n a_i^p = 1, \quad \sum_{i=1}^n y_i^q = \frac{1}{B^q} \sum_{i=1}^n b_i^q = 1.$$

Queremos provar que  $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1$ . Pela desigualdade de Young (2.43), segue que

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i^p}{p} + \frac{y_i^q}{q} \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n x_i^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n y_i^q = 1. \quad (2.49)$$

A igualdade é válida se

$$x_i^p = y_i^q, \quad \forall 1 \leq i \leq n, \quad (2.50)$$

ou ainda

$$\frac{a_i^p}{A^p} = \frac{b_i^q}{B^q}, \quad \forall 1 \leq i \leq n. \quad (2.51)$$

De outro modo temos

$$\frac{a_1^p}{b_1^q} = \frac{a_2^p}{b_2^q} = \dots = \frac{a_n^p}{b_n^q} = \frac{A^p}{B^q}. \quad (2.52)$$

É imediato verificar que, se a condição acima for satisfeita, teremos igualdade.  $\square$

Seguindo [24], a partir da desigualdade de Holder (2.47) obtemos a desigualdade de Minkowski.

### Desigualdade de Minkowski

**Teorema 2.5.** Para  $p > 1$  inteiro e  $x_i, y_i$  reais positivos, temos

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n x_i^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n y_i^p}, \quad (2.53)$$

com igualdade se, e somente se,

$$\frac{x_1}{y_1} = \dots = \frac{x_n}{y_n}.$$



**Demonstração.** Considere a expressão

$$\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^n x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^n y_i(x_i + y_i)^{p-1} \quad (2.54)$$

Fazendo  $q > 1$  de modo que  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$  e aplicando a desigualdade de Holder (2.47) a cada um dos somatórios acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p &\leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right]^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}} \\ &= \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Agora dividindo por  $\left[\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}}$ , segue o resultado desejado.

No próximo capítulo trataremos de várias aplicações usando as desigualdades aqui abordadas.

## CAPÍTULO 3

# APLICAÇÕES DAS DESIGUALDADES

NESTE capítulo apresentaremos aplicações das desigualdades em algumas áreas da matemática. Vamos fazer relação com problemas ligados a geometria, funções, análise combinatória, álgebra e cálculo diferencial. As relações entre médias, muito úteis na resolução de problemas de otimização serão abordadas nesta seção.

### Aplicação 1

Esta aplicação de geometria plana extraída de [14] envolve círculos e polígonos e faz uso da desigualdade de Jensen (2.28).

Sejam dados no plano um semicírculo  $\Gamma$  de raio  $R$  e um diâmetro  $A_0A_1$  de  $\Gamma$ . Para cada inteiro  $n > 2$ , mostre que existe um único  $n$ -ágono  $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}$  satisfazendo as seguintes condições:

- a)  $A_2, \dots, A_{n-1} \in \Gamma$ .
- b) A área de  $A_0A_1A_2 \dots A_{n-1}$  é a maior possível.

Consideremos a Figura 3.1 para representarmos esta aplicação. Seja  $\widehat{A_iOA_{i+1}} = \alpha_i$ ,  $1 \leq i \leq n-1$  (com  $A_n = A_0$ ). Então  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} = \pi$  e a fórmula do seno para a área de um triângulo fornece:

$$\begin{aligned} A(A_0A_1 \dots A_{n-1}) &= \sum_{i=1}^{n-1} A(A_iOA_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2} R^2 \sin(\widehat{A_iOA_{i+1}}) \\ &= \frac{1}{2} R^2 \sum_{i=1}^{n-1} \sin \alpha_i. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Desde que a função seno é estritamente côncava no intervalo  $[0, \pi]$ , segue de (2.28) que

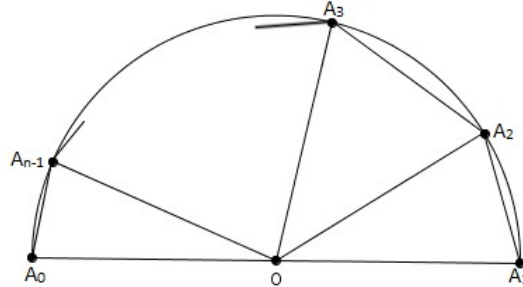


Figura 3.1: Representação geométrica do problema.

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sin(\alpha_i) \leq (n-1) \sin\left(\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i\right) = (n-1) \sin\left(\frac{\pi}{n-1}\right), \quad (3.2)$$

com igualdade se, e somente se,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = \frac{\pi}{n-1}$ . Logo, há um único polígono de área máxima satisfazendo as condições do enunciado.

## Aplicação 2

Aplicação sugerida de [23] é voltada para estudantes que desejam resolver questões de olimpíadas matemáticas.

Sejam  $a, b, c > 0$  números reais tais que  $a + b + c = 1$ . Prove a desigualdade

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}. \quad (3.3)$$

### Demonstração.

A função  $f(x) = x^2$  é convexa no intervalo  $(0, \infty)$ . De acordo com a desigualdade de Jensen (2.27) temos

$$\frac{1}{3} \left( \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \right) \geq \left( \frac{1}{3} \left( a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} \right) \right)^2, \quad (3.4)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 &\geq \frac{1}{3} \left( a + b + c + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)^2 \\ &\geq \frac{1}{3} (1 + 9)^2 = \frac{100}{3}. \square \end{aligned} \quad (3.5)$$

Os problemas a seguir serão resolvidos através das desigualdades entre médias.

### Aplicação 3

A aplicação faz relação com análise combinatória. Neste sentido, o aluno pode explorar o conceito de desigualdade juntamente com o conteúdo de combinatória. O problema consiste em mostrar que

$$\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 \geq C_{8,4}, \quad (3.6)$$

para quaisquer  $x$  e  $y$  reais positivos, onde  $C_{n,p}$  denota a combinação de  $n$  elementos tomados  $p$  a  $p$ .

Sabemos que  $C_{8,4} = \frac{8!}{4!4!} = 70$ . Pela desigualdade (2.35) temos que

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2} = xy, \quad (3.7)$$

daí,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2, \quad (3.8)$$

e portanto

$$\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x} \geq 4. \quad (3.9)$$

Elevando ambos os membros a quarta potência, vem que

$$\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 \geq 256 \geq 70. \quad (3.10)$$

### Aplicação 4

Esta aplicação extraída de [25] poderia ser resolvida usando o princípio de indução.

*Prove que para qualquer inteiro  $n > 1$*

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (3.11)$$

Observe que aplicando (2.35) temos

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n!} &= \sqrt[n]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} < \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n} \\ &= \frac{(n+1)n}{2n} = \frac{n+1}{2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Elevando ambos os membros da desigualdade anterior a  $n$ ésima potência obtemos a prova desejada.

### Aplicação 5

Este exemplo proposto por Korovkin [26] faz uso da geometria espacial através do sólido geométrico prisma, em particular o paralelepípedo reto-retângulo, explorando o tópico de volume.

*De todos os paralelepípedos conhecida a soma das três arestas perpendiculares entre si, encontrar o paralelepípedo de maior volume.*

Suponha  $m = a + b + c$  a soma das arestas e  $V = abc$  o volume do paralelepípedo. Aplicando a desigualdade (2.35) temos

$$\sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3} = \frac{m}{3}, \quad (3.13)$$

então

$$V \leq \frac{m^3}{27}. \quad (3.14)$$

A igualdade ocorre se  $a = b = c = \frac{m}{3}$ , isto é, quando o paralelepípedo representa um cubo.

### Aplicação 6

Outra aplicação interessante envolvendo geometria e as médias aritmética e geométrica.

*Se  $1200\text{cm}^2$  de material estiverem disponíveis para fazer uma caixa com uma base quadrada e sem tampa, encontre o maior volume possível da caixa e as dimensões para que isso ocorra.*

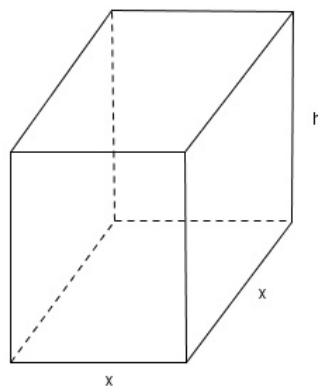


Figura 3.2: Paralelepípedo de arestas  $x$ ,  $x$  e  $h$ .

Observemos que a área da caixa é igual a  $x^2 + 2xh + 2xh = 1200$  e seu volume é igual a  $V = x^2h$ . Aplicando a desigualdade entre médias (2.35) temos

$$\frac{1200}{3} = \frac{x^2 + 2xh + 2xh}{3} \geq \sqrt[3]{x^2 \cdot 2xh \cdot 2xh} = \sqrt[3]{4(x^2h)^2} = \sqrt[3]{4V^2}. \quad (3.15)$$

Logo  $V \leq 4000$  e o volume será máximo se, e somente se,  $x^2 = 2xh$ . Como  $x^2 + 4xh = 1200$  concluimos que as dimensões são  $x = 20\text{cm}$  e  $h = 10\text{cm}$  e o volume máximo  $V = 4000\text{cm}^3$ .

### Aplicação 7

Seguindo a ideia de [7], exploramos mais uma vez o conteúdo de geometria espacial, com o cilindro circular reto, trabalhando com área e volume.

Se uma lata de zinco de volume  $16\pi\text{cm}^3$  deve ter a forma de um cilindro circular reto (Figura 3.3), ache a altura e o raio do cilindro para que a quantidade de material usado em sua fabricação seja a menor possível. Seja  $r$  o raio da base,  $h$  a altura e  $S$  a área da superfície total do cilindro. Então temos

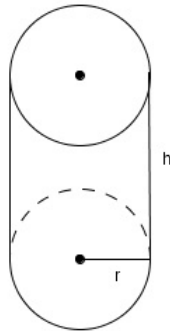


Figura 3.3: Modelo da lata de zinco.

$r^2h = 16$  e  $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$ . Usando a desigualdade das médias em  $S$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{S}{3} &= \frac{\pi rh + \pi rh + 2\pi r^2}{3} \\ &\geq \sqrt[3]{\pi rh \pi rh 2\pi r^2} = \sqrt[3]{2\pi^3 (r^2h)^2} \\ &= \sqrt[3]{2\pi^3 (16)^2} = \sqrt[3]{2^9 \pi^3} = 8\pi. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Com isso  $S \geq 24\pi$  e  $S$  será mínima se, e somente se, a igualdade ocorrer, isto é, quando  $\pi rh = 2\pi r^2$ . Temos que  $\pi rh = 2\pi r^2$  e  $r^2 h = 16$ , obtendo  $h = 4\text{cm}$  e  $r = 2\text{cm}$ , verificando-se que, de fato, o mínimo para  $S$ ,  $S = 24\pi$ , ocorre para esses valores.

### Aplicação 8

Neste exemplo uma forma de solução é através de derivadas. Porém iremos resolvê-lo aplicando desigualdade entre médias.

*Dispomos de uma folha de cartolina de 2m por 3m e queremos construir com a mesma uma caixa aberta com o maior volume possível. Quais devem ser as dimensões da caixa?*

Sendo  $x$  o comprimento do lado do quadrado que deve ser recortado de cada canto da folha (vide Figura 3.4), ficaremos com uma caixa de dimensões  $2 - 2x$ ,  $3 - 2x$  e  $x$ . O volume da caixa

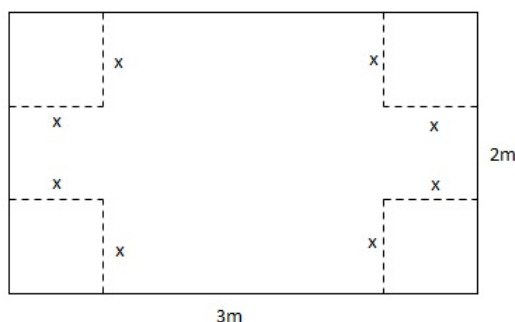


Figura 3.4: Representação da folha de cartolina.

será  $V = (2 - 2x) \cdot (3 - 2x) \cdot x$ , com  $0 < x < 1$ . Vamos considerar os números  $2(2 - 2x)$ ,  $3 - 2x$ ,  $6x$ . Aplicando a desigualdade (2.35), temos:

$$\sqrt[3]{2(2 - 2x)(3 - 2x)6x} \leq \frac{2(2 - 2x) + (3 - 2x) + 6x}{3}, \quad (3.17)$$

de modo que

$$\sqrt[3]{12(2 - 2x)(3 - 2x)x} \leq \frac{7}{3}, \quad (3.18)$$

e,

$$\sqrt[3]{12V} \leq \frac{7}{3}. \quad (3.19)$$

Logo

$$V \leq \frac{343}{324}, \quad (3.20)$$

com igualdade se, e somente se,  $2(2 - 2x) = (3 - 2x) = 6x$ . Daí concluímos que o volume máximo se obtém quando  $x \cong 0.4$  e as dimensões da caixa são 1.2, 2.2 e 0.4.

### Aplicação 9

Também conhecida como Desigualdade Isoperimétrica para Triângulos, vejamos esta interessante aplicação extraída de [13].

*Provar que entre todos os triângulos de perímetro constante  $p$ , o equilátero é o de maior área.*

**Demonstração.** Consideremos um triângulo de lados  $a, b$  e  $c$  com  $a + b + c = p$ . A área  $S$  desse triângulo é dada pela fórmula de Heron,

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}(\frac{p}{2} - a)(\frac{p}{2} - b)(\frac{p}{2} - c)}. \quad (3.21)$$

Aplicando (2.35), temos que

$$S \leq \sqrt{\frac{p}{2}(\frac{\frac{p}{2} - a + \frac{p}{2} - b + \frac{p}{2} - c}{3})^3} = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}. \quad (3.22)$$

Concluímos então que a maior área possível é  $\frac{p^2}{12\sqrt{3}}$ , a qual se obtém quando

$$\frac{p}{2} - a = \frac{p}{2} - b = \frac{p}{2} - c, \quad (3.23)$$

isto é,  $a = b = c$ . Concluímos que triângulo é equilátero e neste caso

$$\frac{p^2}{12\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \square \quad (3.24)$$

As duas aplicações posteriores tem como objetivo determinar máximo de funções. Vejamos tais situações problema.

### Aplicação 10

*Determine o valor máximo da função  $f(x) = x(1 - x)$ , sendo  $x \in (0, 1)$ .*

Pelo fato de ser uma função quadrática, poderíamos calcular o valor máximo através da ordenada do vértice ou utilizando conceitos de cálculo diferencial. Para tanto vamos usar a desigualdade (2.35). Temos que

$$\frac{x + (1 - x)}{2} \geq \sqrt{x(1 - x)}, \quad (3.25)$$



logo

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}, \quad (3.26)$$

com igualdade ocorrendo se, e somente se,  $x = 1 - x$ , ou seja,  $x = \frac{1}{2}$ . Portanto, substituindo  $x = \frac{1}{2}$  em  $f(x) = x(1-x)$ , verificamos que o valor máximo de  $f$  é  $\frac{1}{4}$ .

### Aplicação 11

Determine o valor máximo da função  $f(x) = x^3(1-x)$ , sendo  $x \in (0, 1)$ .

A tendência é usarmos os fatores da função, como no problema anterior, ou seja, aplicar (2.35) com os números reais positivos  $x^3$  e  $1-x$ :

$$\frac{x^3 + (1-x)}{2} \geq \sqrt{x^3(1-x)}. \quad (3.27)$$

Apesar de verdadeiro, esse fato não dá um valor máximo para  $f$ . Outra maneira seria usar  $x, x, x, 1-x$ , todos positivos:

$$\frac{x + x + x + (1-x)}{4} \geq \sqrt[4]{x^3(1-x)}, \quad (3.28)$$

isto é,

$$x^3(1-x) \leq \left(\frac{2x+1}{4}\right)^4, \quad (3.29)$$

e mais uma vez não chegamos a um valor máximo. Agora substituindo  $1-x$  por  $3(1-x)$  temos:

$$\frac{x + x + x + 3(1-x)}{4} \geq \sqrt[4]{x^3 3(1-x)}, \quad (3.30)$$

com isso

$$x^3 3(1-x) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^4, \quad (3.31)$$

se, e somente se,

$$x^3(1-x) \leq \frac{27}{256}. \quad (3.32)$$

Como a igualdade ocorre com  $x = 3(1-x) \implies x = \frac{3}{4}$ , verificando que o valor máximo de  $f$  é  $\frac{27}{256}$ .

## Aplicação 12

Esta aplicação é uma adaptação do problema de Euclides citado na Introdução do trabalho. Vamos resolvê-lo usando desigualdade entre médias com base em [13].

*De todos os retângulos com o mesmo perímetro, qual tem área máxima?*

Consideremos os lados do retângulo  $x$  e  $y$  e o perímetro  $2p$ , então temos que  $x + y = p$ , com média aritmética de  $x$  e  $y$  igual a  $\frac{p}{2}$ . A área do retângulo é  $A = xy$ . Aplicando a desigualdade entre a média aritmética e geométrica (2.35) temos

$$\sqrt{A} = \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} = \frac{p}{2}. \quad (3.33)$$

Logo,

$$A \leq \frac{p^2}{4} \quad (3.34)$$

e a igualdade só é obtida quando  $x = y$ . Portanto, o retângulo de maior área é o quadrado de área  $\frac{p^2}{4}$ .

## Aplicação 13

Através de [2] trazemos um problema com geometria plana, onde abordamos a figura do retângulo, perímetro e diagonal. Para tanto utilizaremos a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática.

*Sejam  $a, b, c \geq 0$ , em que  $a, b$  são os comprimentos dos lados do retângulo e  $c$  a medida da diagonal do retângulo, de acordo com Figura 3.5. Concluir que de todos os retângulos com medidas de lado e com diagonal o que tem maior perímetro é o quadrado de medida de lado  $2\sqrt{2}c$  e o que tem maior área é o quadrado de medida de lado  $c^2/2$ .*

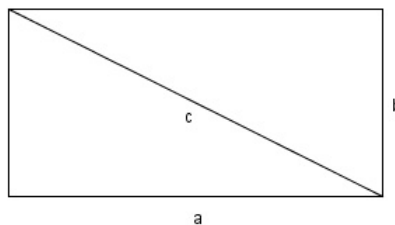


Figura 3.5: Retângulo de lados  $a, b$  e diagonal  $c$ .

Aplicando (2.23) ao perímetro do retângulo obtemos

$$P = 2(a + b) = 4\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq 4\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 4\sqrt{\frac{c^2}{2}} = 2\sqrt{2}c. \quad (3.35)$$

Simplificando,

$$P = 4\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq 2\sqrt{2}c. \quad (3.36)$$

No caso da área do retângulo, a desigualdade é dada por

$$A = ab \leq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \frac{P^2}{16} \leq \frac{(2\sqrt{2}c)^2}{16} = \frac{c^2}{2}. \quad (3.37)$$

Para a área e perímetro a igualdade verifica-se quando  $a = b$ .

#### Aplicação 14

Outra aplicação envolvendo geometria plana e otimização pode ser encontrada em [15], capítulo 7.

*Determinar as dimensões do paralelepípedo de menor diagonal possível, sabendo que a soma dos comprimentos de todas suas arestas é 12.*

Considere um paralelepípedo retângulo de dimensões  $a$ ,  $b$  e  $c$ , como o comprimento de todas suas arestas é 12, podemos escrever,  $4a + 4b + 4c = 12$ , então  $a + b + c = 3$ . Seja  $d$  a diagonal, sabendo que

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \quad (3.38)$$

e usando (2.23) teremos

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} &\geq \frac{a + b + c}{3} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3} &\geq 1 \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 &\geq 3 \\ \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} &\geq \sqrt{3}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Como queremos a menor diagonal e sabendo-se que igualdade  $MA = MQ$ , ocorre quando  $a = b = c$ , tomaremos  $d = \sqrt{3} \implies a = b = c = 1$ .

### Aplicação 15

Para fechar as aplicações com médias veremos agora um problema cuja solução depende da desigualdade entre as médias harmônica e geométrica.

Sejam  $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ , tal que  $x + y + z = 1$ . Prove que:

$$L = \frac{xy}{\sqrt{\frac{1}{3} + z^2}} + \frac{zx}{\sqrt{\frac{1}{3} + y^2}} + \frac{yz}{\sqrt{\frac{1}{3} + x^2}} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.40)$$

**Demonstração.** Note que

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + x^2 &= \frac{1}{3}(x + y + z)^2 + x^2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)}{3} + x^2 \\ &\geq \frac{xy + yz + zx + 2(xy + yz + zx)}{3} + x^2 = xy + yz + zx + x^2 \\ &= (x + y)(x + z). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Aplicando as desigualdades (3.41) e (2.38) notamos que

$$\frac{yz}{\sqrt{\frac{1}{3} + x^2}} \leq \frac{yz}{\sqrt{(x + y)(x + z)}} \leq \frac{yz}{2} \left( \frac{1}{x + y} + \frac{1}{x + z} \right). \quad (3.42)$$

Analogamente

$$\frac{xy}{\sqrt{\frac{1}{3} + z^2}} \leq \frac{xy}{2} \left( \frac{1}{z + x} + \frac{1}{z + y} \right), \quad (3.43)$$

e

$$\frac{zx}{\sqrt{\frac{1}{3} + y^2}} \leq \frac{zx}{2} \left( \frac{1}{y + z} + \frac{1}{y + x} \right). \quad (3.44)$$

Somando (3.42), (3.43) e (3.44) obtemos

$$\begin{aligned} L &\leq \frac{yz}{2} \left( \frac{1}{x + y} + \frac{1}{x + z} \right) + \frac{xy}{2} \left( \frac{1}{z + x} + \frac{1}{z + y} \right) + \frac{zx}{2} \left( \frac{1}{y + z} + \frac{1}{y + x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{xy + yz}{x + z} + \frac{xy + zx}{y + z} + \frac{yz + zx}{y + x} \right) = \frac{x + y + z}{2} = \frac{1}{2}. \square \end{aligned} \quad (3.45)$$

Para maiores detalhes vide [23].

## Aplicação 16

A desigualdade triangular provada anteriormente foi limitada a números reais. Para superarmos esta lacuna, faremos uma demonstração analítica com números complexos seguindo [6].

Quaisquer que sejam os números complexos  $Z$  e  $W$ , temos

$$|Z + W| \leq |Z| + |W|, \quad (3.46)$$

com igualdade valendo se, e somente se, um dos números é múltiplo escalar real não negativo do outro.

**Demonstração.** Elevando  $|Z + W|$  ao quadrado, temos

$$\begin{aligned} |Z + W|^2 &= (Z + W) \cdot (\overline{Z + W}) = (Z + W) \cdot (\overline{Z} + \overline{W}) \\ &= Z \cdot \overline{Z} + Z \cdot \overline{W} + W \cdot \overline{Z} + W \cdot \overline{W} \\ &= |Z|^2 + Z \cdot \overline{W} + W \cdot \overline{Z} + |W|^2. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Observe que

$$\begin{aligned} Z \cdot \overline{W} + W \cdot \overline{Z} &= Z \cdot \overline{W} + \overline{\overline{W} \cdot Z} = 2\operatorname{Re}(Z \cdot \overline{W}) \\ &\leq 2|Z\overline{W}| = 2|Z| \cdot |\overline{W}| = 2|Z| \cdot |W|, \end{aligned} \quad (3.48)$$

logo,

$$|Z + W|^2 \leq |Z|^2 + 2|Z| \cdot |W| + |W|^2 = (|Z| + |W|)^2, \quad (3.49)$$

com isso concluímos que

$$|Z + W| \leq |Z| + |W|. \square \quad (3.50)$$

## Aplicação 17

O exemplo a seguir proposto por Oliveira [15] é uma aplicação da desigualdade triangular.

Duas torres de alturas  $h_1$  e  $h_2$ , respectivamente, estão separadas a uma distância  $d$ . As torres são amarradas por uma corda  $APB$  que vai do topo  $A$  da primeira torre para um ponto  $P$  no chão, entre as torres, e então até o topo  $B$  da segunda torre, como na Figura 3.6. Qual a posição do ponto  $P$  que nos dá o comprimento mínimo da corda a ser utilizada?

Para resolvermos o problema imaginemos que a superfície do chão é um espelho e que refletimos o ponto através deste, obtendo assim o ponto  $B'$  como mostra a Figura 3.7. Consideremos

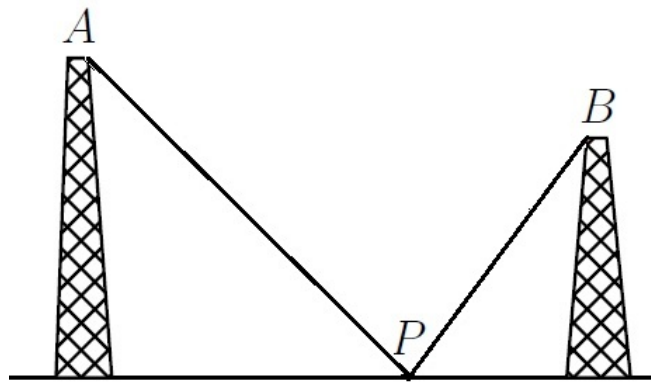


Figura 3.6: Problema das Torres.

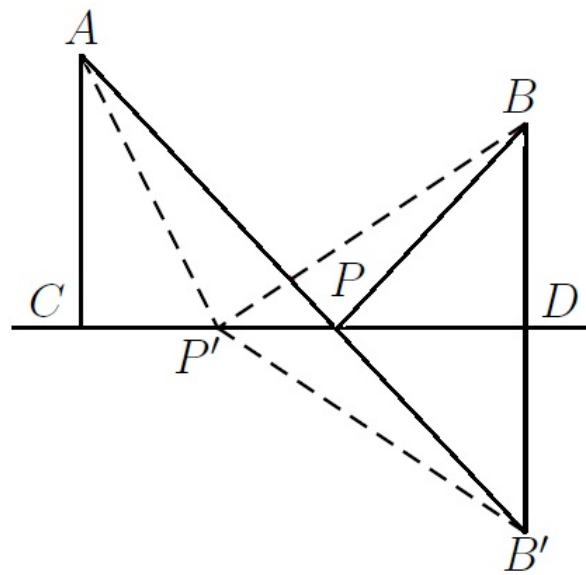


Figura 3.7: Solução geométrica do problema das torres.

o segmento  $AB'$  que intercepta o chão no ponto  $P$  e verificaremos que este é o ponto que nos dá o comprimento mínimo da corda. Com efeito, suponhamos que existe outro  $P'$  situado entre as torres que nos dá um comprimento menor para a corda. A partir da Figura 3.7 é fácil ver que os triângulos  $BPD$  e  $B'PD$  são congruentes, assim como os triângulos  $BP'D$  e  $B'P'D$ . Logo, as seguintes igualdades seguem diretamente das congruências:

$$BP = B'P; BP' = B'P'. \quad (3.51)$$

Usando a desigualdade triangular no triângulo  $AB'P'$  e as igualdades (3.51), temos

$$AP' + P'B = AP' + P'B' \geq AB' = AP + PB' = AP + PB, \quad (3.52)$$

chegando assim à conclusão de que  $AP + PB$  nos oferece o comprimento mínimo desejado. Iremos calcular agora a que distância está  $P$  da base  $D$ .

Lembremos que  $AC = h_1$  e  $BD = h_2$  e  $CD = d$  e

$$\text{tang}(\angle BPD) = \frac{h_2}{PD} = \frac{h_1}{d - PD}. \quad (3.53)$$

Daí tem-se

$$PD = \frac{dh_2}{h_1 + h_2}. \quad (3.54)$$

### Aplicação 18

Esta aplicação faz uso da desigualdade de Cauchy-Schwarz, abordando propriedades de triângulos retângulos, com referência em [15].

*Entre todos os triângulos retângulos de catetos  $a$  e  $b$  e hipotenusa  $c$  fixada, o que tem maior soma dos catetos  $s = a + b$  é o triângulo isósceles.*

Usando (2.1) temos que

$$a + b = a \cdot 1 + b \cdot 1 \leq \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{1^2 + 1^2} = c\sqrt{2}, \quad (3.55)$$

e este máximo é obtido quando  $a = \alpha \cdot 1$  e  $b = \alpha \cdot 1$  ou  $1 = \alpha \cdot a$  e  $1 = \alpha \cdot b$ . Em qualquer caso devemos ter  $a = b$ .

A próxima aplicação extraída de [27] também é referente a desigualdade de *Cauchy-Schwarz*.

### Aplicação 19

Considere  $a, b, c$  números reais positivos, tais que  $abc = 1$ . Prove que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}. \quad (3.56)$$

**Demonstração.** Faça  $x = ab$ ,  $y = bc$  e  $z = ca$ . Temos que  $x, y, z$  são números reais positivos, de tal modo que  $xyz = (abc)^2 = 1$ . Reescrevendo o lado esquerdo de (3.56), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2(ab+ac)} + \frac{1}{b^2(bc+ba)} + \frac{1}{c^2(ca+cb)} &= \frac{y}{xz(x+z)} + \frac{z}{xy(x+y)} + \frac{x}{yz(y+z)} \\ &= \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Por (2.1),

$$\left( \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} \right) \cdot [(y+z) + (x+z) + (x+y)] \geq (x+y+z)^2. \quad (3.58)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y} &\geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} \\ &= \frac{x+y+z}{2} = \frac{3}{2} \left( \frac{x+y+z}{3} \right) \\ &\geq \frac{3}{2} (xyz)^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}. \square \end{aligned} \quad (3.59)$$

### Aplicação 20

Segundo Cevtkovski [23], veremos agora uma aplicação usando a desigualdade de *Holder*.

Sejam  $x, y, z$  números reais positivos. Prove a desigualdade

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+y)(z+x)}} \leq 1. \quad (3.60)$$

**Demonstração.** Aplicando (2.47) para  $n = 2$  e  $p = q = 2$ , obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+y)(x+z)} &= ((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2)^{\frac{1}{2}} ((\sqrt{z})^2 + (\sqrt{x})^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \sqrt{x} \cdot \sqrt{z} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{xz} + \sqrt{xy}, \end{aligned} \quad (3.61)$$



ou seja,

$$\frac{1}{\sqrt{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{1}{\sqrt{xz} + \sqrt{xy}} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{z})}. \quad (3.62)$$

Então, segue-se que

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} \leq \frac{x}{x + \sqrt{x}(\sqrt{y} + \sqrt{z})} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}. \quad (3.63)$$

Analogamente,

$$\frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} \leq \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}, \quad (3.64)$$

e

$$\frac{z}{z + \sqrt{(z+y)(z+x)}} \leq \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}. \quad (3.65)$$

Somando as três últimas desigualdades, temos

$$\frac{x}{x + \sqrt{(x+y)(x+z)}} + \frac{y}{y + \sqrt{(y+z)(y+x)}} + \frac{z}{z + \sqrt{(z+y)(z+x)}} \leq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}} = 1. \square$$

A igualdade ocorre se, e somente se,  $x = y = z$ .

Em seguida mostraremos mais uma aplicação, que será resolvida com a desigualdade de *Minkowski*, com base em [23].

### Aplicação 21

Seja  $p \geq 1$  um número real arbitrário. Prove que, para qualquer positivo inteiro  $n$  temos

$$1^p + 2^p + \dots + n^p \geq n \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^p. \quad (3.66)$$

Se  $p = 1$ , então a desigualdade dada é verdadeira, ou seja, torna-se a igualdade. Seja  $p > 1$  e tomemos  $x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = n$  e  $y_1 = n, y_2 = n-1, \dots, y_n = 1$ . Pela desigualdade (2.53)

$$\left((1+n)^p + (1+n)^p + \dots + (1+n)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 2(1^p + 2^p + \dots + n^p)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.67)$$

ou seja,

$$n(1+n)^p \leq 2^p(1^p + 2^p + \dots + n^p), \quad (3.68)$$

ou,

$$1^p + 2^p + \dots + n^p \geq n \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^p. \quad (3.69)$$

A intenção neste capítulo foi mostrar várias aplicações de desigualdades e suas relevantes interpretações com o intuito de que o aluno desenvolva competências matemáticas, apresentando o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que ele continue aprendendo [28]. Ao final deste capítulo observamos também que muitas aplicações das desigualdades estão ligadas a conteúdos do ensino médio, já citados no início do capítulo. Com resultados importantes em algumas áreas da matemática, como exemplo na geometria, quando se trata de problemas de otimização envolvendo áreas de figuras planas, como triângulo, retângulo, figuras espaciais no cálculo de área e volume, no cálculo com aplicações de máximo e mínimo de funções e problemas de competições matemática. Isto também motiva ampliar o conhecimento sobre o assunto, em busca de mais resultados, como também a sua prática na sala de aula.

## CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos uma introdução sobre as desigualdades e a importância de suas aplicações, seguida do estudo de algumas desigualdades e suas demonstrações, finalizando com algumas aplicações que possam ser compreendidas pelos alunos do ensino médio. Com base no tema abordado, acreditamos no desenvolvimento de competências para resolver vários problemas envolvendo desigualdades, levando em consideração o nível do conteúdo que destacamos.

Através deste estudo podemos perceber que existem muitas desigualdades e várias formas de demonstrá-las. No entanto priorizamos as formas mais básicas, devido ao público que queremos atingir versando sobre todos níveis de conhecimento. Além disso apresentamos resoluções de diferentes situações problema que vão desde as questões contextualizadas até as questões de competições matemáticas, ambas significativas para os alunos interessados em matemática.

Sabemos que a resolução de problemas é fundamental no ensino de Matemática, fazendo com que o aluno enfrente novos desafios e desenvolva sua capacidade de raciocínio, tornando-se mais crítico e investigativo. Com isso para trabalhos futuros podemos explorar estas desigualdades aplicando recursos mais avançados e mostrando que existem outros caminhos e outras áreas onde elas são muito importantes. Consequentemente ampliando nosso público alvo, visto que diversas áreas usam ferramentas básicas de cálculo diferencial, integral e álgebra para aplicações práticas.

Diante do que foi explorado e apresentado, o estudos acerca das desigualdades é muito significativo e deve ser abordado com maior frequência seja no ensino médio, ou para apro-

fundar o grau de conhecimento. Isto é importante pois podemos proporcionar uma extensão mais complexa do trabalho em sala de aula, explorando e investigando aplicações de outras desigualdades na matemática.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] FINK, A. M. An Essay on the History of Inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 249, p. 118–134, 2000.
- [2] CARVALHO, L. M. A. C. *Problemas com Desigualdades para o Ensino Secundário*. Portugal: Universidade de Lisboa, 2012.
- [3] SANTIAGO, A. E. E.; AUSTUDILLO, M. T. G. Entre Euclides e a Actualidade: Um Problema de Otimização. Portugal, 2013.
- [4] WU, H. H.; WU, S. Various proofs of the Cauchy-Schwarz inequality. *Mihály Bencze*, v. 17, p. 221–229, 2009.
- [5] GARBI, G. G. *A Rainha das Ciências: Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática*. São Paulo: Editora livraria da Física 5<sup>a</sup> ed., 2010.
- [6] HEFEZ, A. *Polinômios e Equações Algébricas*. Rio de Janeiro: SBM, 2002.
- [7] ARAÚJO, F. H. A. Médias e Problemas de Otimização. *Revista do Professor de Matemática*, n. 76, p. 27–29, 2011.
- [8] OLIVEIRA, L. A. F.; SOUZA, F. L. Desigualdade de Jensen. In: . Anais do CNMAC. SBMAC, c2009.
- [9] BARATA, J. C. A. *Curso de Física-Matemática*. São Paulo: Departamento de Física Matemática da USP, 2013.

- [10] BAZZINI, L.; TSAMIR, P. Algebraic Equations and Inequalities: Issues for Research and Teaching. 2004.
- [11] HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética*, 2<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
- [12] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, v. 1, 1997.
- [13] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, v. 2, 1998.
- [14] NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: Introdução à Análise*. Rio de Janeiro: SBM, v. 1, 2012.
- [15] OLIVEIRA, K. I. M.; FERNÁNDEZ, A. J. C. *Iniciação à Matemática: Um Curso com Problemas e Soluções* 2<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [16] CARMO, M. P.; MORGADO, A.; WAGNER, E. *Trigonometria e Números Complexos*. Rio de Janeiro: SBM, 1992.
- [17] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, v. 3, 1998.
- [18] LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 7<sup>a</sup> ed., 2008.
- [19] HOWARD, A.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações*. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- [20] NETO, A. C. M. Desigualdades Elementares. *Revista Eureka*, n. 5, p. 34–50, 1999.
- [21] GARLING, D. J. H. *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [22] NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar: Números Reais*. Rio de Janeiro: SBM, v. 1, 2012.
- [23] CEVTKOVSKI, Z. *Inequalities: Theorems, Techniques and Selected Problems*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [24] CARLSON, J. W. *Inequalities*. Manhattan, Kansas: A MASTER'S REPORT, B. S., 1963.

- [25] SHKLARSKY, D. O.; CHENTZOV, N. N.; YAGLOM, I. M. *The USSR Olympiad Problem Book*. New York: Dover Publications, Inc., 1993.
- [26] KOROVKIN, P. P. *Inequalities*. Moscow: MIR PUBLISHERS, 1975.
- [27] DJUKIC, D.; JANKOVIC, V.; MATIC, I.; PETROVIC, N. *The Imo Compendium: A Collection of Problems Suggested for The International Mathematical Olympiads: 1959-2004*. Springer, 2006.
- [28] DE EDUCACÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA, S. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília - DF: Ministério da Educação, 1999.